Комбинаторика

1. Вовед

Комбинаториката може да се смета како методологија на колекционирање и подредување на елементите на множествата, според некои правила. Обично е потребно да се знае:

- дали саканото колекционирање или подредување е можно
- ако е можно, на колку начини може да се направи
- како да се направат тие колекционирања и подредувања.

Првите две ни се сега од интерес, додека третото се проучува во алгоритми.

Да разгледаме некои подготвителни елементи од множества.

1. <u>Број на елементи во производ на множества</u>.
   Ако $A_1, A_2,..., A_k$ се множества со $n_1, n_2,..., n_k$ елементи соодветно, тогаш производот $A_1\times A_2\times ... \times A_k = \{(a_1, a_2,..., a_k) \mid a_i \in A_i, i = 1,2,\ldots,k\}$ има точно $n_1\cdot n_2\cdot ... \cdot n_k$ елементи.
   Пример: Од градот A до градот B има 3 пата, од градот B до градот C има 2 пата, од градот C до градот D има 4 пата. Тогаш бројот на (различни) патишта од A до D е $3\cdot2\cdot4=24$.
2. <u>Број на подмножества</u>.
   Ако A е множество со n елементи, тогаш бројот на неговите подмножества е 2^n. Имено, формирањето подмножество можеме да го гледаме како вклучување и исклучување на елементи од множеството A. Така можеме да формираме низи со должина n со нули и единици, каде што 0 се припишува на елемент кој не влегол во подмножеството, а 1 се припишува на елемент кој влегол во подмножеството. Бројот на овие низи е еднаков на бројот на разместувањата на 2 елементи на n места, односно на избор на 2 елемента n пати. За првиот избор има 2 можности, за него 2 можности за втор, итн., за секој избор на $n-1$ елементи за 0 или 1 имаме 2 можности за n-ти, па $\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot...\cdot2}_{n}=2^n$. Всушност тоа е бројот на елементи на множеството $\underbrace{B\times B\times B\times...\times B}_{n}$ за $B=\{0,1\}$.

2. Варијации

Разликуваме варијации со повторување и варијации без повторување. Варијациите може да се разберат како разместување на n елементи на k места, со или без повторување на елементите. На пример 3 елементи $\{a, b, c\}$ да ги разместиме на 2 места со повторување, ќе имаме *aa, ab, ac, bb, bc, ba, cc, ca, cb*, а без повторување *ab, ac, bc, ba, ca, cb.*(*)

1. <u>Варијации со повторување</u>.
   Ако A е множество со n елементи, варијација со повторување од класа k е секој елемент од $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k}$. Бројот на варијации со повторување на n елементи од класа k се означува со $\overline{V}_{k,n}$ и изнесува n^k. Примерите со користење на варијации со повторување се често од вид на извлекување на k елементи од множество со n елементи со запазување на редоследот, со враќање.
   Пример. Од шпил карти влечеме 3 една по една, со враќање во шпилот. Колку случаи има?
- За првата карта има 52 можности, и бидејќи ја враќаме, имаме 52 можности и за втората, а бидејќи и таа ја враќаме имаме пак 52 можности и за третата, па вкупно, $\overline{V}_{3,52} = 52^3$.

2. <u>Варијации без повторување.</u>
   Ако A е множество со n елементи и ги избереме сите k-торки со различни компоненти, тогаш секоја од нив е варијација без повторување на n елементи од класа k. Бројот на варијации без повторување на n елементи од класа k се означува со $V_{k,n}$ и изнесува $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Примерите со користење на варијации без повторување се често од вид на извлекување на k елементи со запазување на редоследот, од множество со n елементи, без враќање.
   Пример. Од шпил карти влечеме 3 една по една, без враќање во шпилот. Колку случаи има?
- За првата карта има 52 можности, и бидејќи не ја враќаме, остануваат 51 можност за втората, а бидејќи и таа не ја враќаме остануваат 50 можности за третата, па вкупно, $V_{3,52} = 52\cdot 51\cdot 50$.

(*) Записот буква до буква е заради прегледност, всушност напишаните елементи се подредени парови (a,b), итн.

3. Пермутации

Разликуваме пермутации без повторување и пермутации со повторување. Пермутациите може да се разберат како разместување на n елементи на n места, со повторување (т.е. има и исти елементи) или без повторување на елементите (сите различни). На пример 3 елементи $\{a, b, c\}$ да ги разместиме без повторување, ќе имаме *abc, acb, bac, bca, cab, cba*. Ако сакаме од $\{a, b\}$, a да се повторува 3 пати и b 2 пати, тогаш разместуваме на 3+2=5 места: *aaabb*, *aabab*, *abaab*, *baaab*, *aabba*, *ababa*, *baaba*, *abbaa*, *babaa*, *bbaaa*. (**)

1. Пермутации без повторување.
   Секоја варијација без повторување од n елементи класа n се вика пермутација без повторување. Бројот на пермутации без повторување од n елементи се означува со P_n и изнесува $n!$. Примерите со користење на пермутации без повторување се од вид на распределување на множество елементи на исто толкаво множество елементи.
   Пример. Ана, Боби, Вале и Гоце треба да добијат по една овошка – јаболко, круша, портокал и банана. На колку начини може да се распределат овошките на децата, ако секое добива различен вид овошка едно од друго?

- На 4 деца им се распределуваат 4 различни овошја, што значи ги броиме биекциите меѓу множеството деца и множеството овошки, а тоа е пермутација $P_4 = 4! = 24$. Има 24 начини да се распределат различни овошки на децата.

2. Пермутации со повторување.
   Ако A е множество со k елементи $a_1, a_2,..., a_k$ и a_1 се јавува n_1 пати, a_2 се јавува n_2 пати, итн., a_k се јавува n_k пати, при што $n = n_1 + n_2 + ...+ n_k$, тогаш бројот на пермутации со повторување изнесува $P_n(n_1,..., n_k) = \dfrac{n!}{n_1!\cdot ... \cdot n_k!}$. Формулата е ваква бидејќи наместо n различни елементи за кои би имале $n!$ пермутации, имаме прво n_1 исти елементи па нивните пермутации се истото подредување, што значи $n!$ треба да го скратиме $n_1!$ пати, итн., сѐ до крај кога имаме $n_k!$ исти пермутации кои ги кратиме од вкупниот број $n!$ пермутации.
   Пример. а) На колку начини може да подредиме 2 црни, 3 црвени и 4 бели топчиња?

- $2 + 3 + 4 = 9$, па $P_9(2,3,4) = \dfrac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!} = 1260$ начини.

(**) Записот буква до буква е заради прегледност, слично како и претходно ова се подредени тројки (кај примерот без повторување) и подредени 5-торки (кај примерот со повторување).

4. Комбинации

Разликуваме комбинации без повторување и комбинации со повторување. Комбинациите без повторување може да се разберат како подмножества од k елементи од множество со n елементи. За комбинациите со повторување се земаат предвид подмножествата од k елементи, но и мулти-подмножествата („мулти“ е префикс за множества во кои се дозволени исти елементи), од k елементи. Разликата со варијациите е во тоа што кај комбинациите, распоредот на елементите не е важен, т.е. варијациите се k-торки, а комбинациите се множества (и мултимножества – кај комбинациите со повторување). На пример за 3 елементи $\{a, b, c\}$ комбинациите со 2 елементи без повторување се *ab, ac, bc,* а комбинациите со 2 елементи со повторување, се *aa, ab, ac, bb, bc, cc.*(***)

1. <u>Комбинации без повторување.</u>

Ако A е множество со n елементи, секое негово подмножество од k елементи е комбинација без повторување на n елементи од класа k. Бројот на комбинации без повторување на n елементи од класа k се означува со $C_{k,n}$ и изнесува $\dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Формулата е појасна ако се согледа дека $\dfrac{V_{k,n}}{P_k}=C_{k,n}$, т.е. се кратат $k!$ (подредени) елементи од варијациите без повторување. Примерите со користење на комбинации без повторување се често од вид на избор на k различни елементи одеднаш (заради небитниот редослед на избор) од множество со n елементи.

Пример. Од група од 7 мажи и 8 жени, треба да се изберат 4 мажи и 5 жени. На колку начини може да се направи тоа?

- Избор на 4 мажи од 7 може да се направи на $C_{4,7}=\dfrac{7!}{4!\cdot 3!}=35$ начини, а избор на 5 жени од 8, може да се направи на $C_{5,8}=\dfrac{8!}{5!\cdot 3!}=56$ начини. Вкупно, избор на 4 мажи од 7 и 5 жени од 8 може да се направи на $C_{4,7}\cdot C_{5,8}=35\cdot 56=1960$ начини.

(Забележи дека се работи за *различни* личности со дополнителна карактеристика – пол, која не е суштинска во определувањето на нивната различност. Затоа користиме комбинации без повторување).

(***) Записот буква до буква е заради прегледност, всушност напишаните елементи се множества $\{a,b\}$, итн., или мултимножества $\{a,a\}$ итн.

Комбинации со повторување.

Ако во комбинациите дозволиме еднакви елементи, односно може да правиме подмножества во кои има повторени елементи (мултимножества, како на пример $\{a, a, b\}$, кое може да биде мултиподмножество од $\{a, b, c\}$), добиваме комбинации со повторување. Бројот на комбинации со повторување на n елементи од класа k се означува со $\overline{C}_{k,n}$ и изнесува $\overline{C}_{k,n} = C_{k,n+k-1}$.

Пример. Во цвеќарница се продаваат 5 вида цвеќе. На колку начини може да се направи букет од 11 цвеќиња?

- Секако, во букетот ќе се повторуваат некои видови цвеќе, а некои видови во некои букети може и воопшто да ги нема. Имаме комбинации со повторување и нив ги има $\overline{C}_{11,5} = C_{11,15} = \frac{15!}{11!\cdot 4!} = 1365.$

Задачи:

1. Во една чекална има 5 места за седење едно до друго, а чекаат 7 луѓе. На колку начини можат да седат луѓето во чекалната?

- Ова се варијации без повторување $V_{5,7} = \frac{7!}{2!} = 2520.$ (Редоследот на седење на луѓето е битен и затоа се варијации. Тоа што се без повторување е бидејќи луѓето се, јасно, различни).

2. Колку а) трицифрени; б) четирицифрени броеви со различни цифри може да се состават од множеството $\{4,5,6,7,8,9\}$?

- Ова се варијации без повторување а) $V_{3,6} = \frac{6!}{3!} = 120;$ б) $V_{4,6} = \frac{6!}{2!} = 360.$

3. Колку има трицифрени броеви кои се состојат од различни цифри?

- За првата цифра имаме избор од 1 до 9, т.е. 9 можности, за втората цифра имаме избор од 0 до 9 без цифрата која била избор за прва цифра (пак 9 можности) и третата цифра е од 0 до 9 без цифрите кои биле избор за прва и втора цифра(8 можности. Значи трицифрени броеви кои се состојат од различни цифри има $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648 = V_{1,9} \cdot V_{2,9}$.

4. Колку можни начини има за да се пополни PIN на телефон (4 цифри)?

- $\overline{V}_{4,10} = 10^4$.

5. Еден човек малку го заборавил PIN-от на картичката, но сепак е сигурен дека се состои од цифрите *a, b, c, d* и дека најмалата цифра *a* и најголемата цифра *d* не се на почеток ни на крај. Доволни ли му се 3-те дозволени обиди да го погоди PIN-от?

- (Без дополнителните информации освен 4-те цифри би имало $P_4 = 4! = 24$ начини да се распоредат). Има $P_2 = 2! = 2$ начини да се фиксираат *b* и *c* на почеток и крај, а за нив $P_2 = 2! = 2$ начини да се разместат *a* и *d* по средина, т.е. има $2!\cdot 2! = 4$ начини да се погоди PIN-от со дадените информации, па во 3-те дозволени обиди може да се случи и да не го погоди бројот.

6. Скопските телефонски броеви се со 7 цифри кои почнуваат на некоја од цифрите 1,2,3,4,5,6 или 7. Колку од нив се такви што

а) првите 2 цифри им се исти;

б) првите 3 и последните 3 им се посебно еднакви;

в) на парните места има парен број, а на непарните места – непарен број;

г) сите да се различни цифри и дополнително, да бидат како под в)?

- а) Бидејќи треба да се исти, првите 2 цифри треба да ги третираме како еден избор, и тоа построгиот избор, а тоа е изборот на првата цифра која има 7 можности. Останатите 5 цифри се произволни од 0 до 9 и можат да се повторуваат (варијации со повторување). Значи имаме $7 \cdot 10^5 = V_{1,7} \cdot \overline{V}_{5,10}$.

б) За првите 3 цифри го имаме само изборот на првата цифра (од 1 до 7), средната цифра може да биде која било од 0 до 9, и последните 3 цифри се еден избор од 0 до 9. Значи, одговорот е $7\cdot 10\cdot 10 = 700$.

в) На парните места (вкупно 3 – второто, четвртото и шестото) имаме по 5 избори (0,2,4,6 и 8), на првото место има 4 избори (1,3,5,7), а на останатите 3 непарни места (трето, петто и седмо) имаме 5 избори (1,3,5,7 и 9). Значи имаме вкупно $4\cdot 5^3\cdot 5^3 = V_{1,4} \cdot \overline{V}_{3,5} \cdot \overline{V}_{3,5}$.

г) Гледаме место по место почнувајќи од лево кон десно, а разгледуваме слично како под в): На првото место имаме 4 избори, на второто место имаме 5 избори, на третото место имаме 4 избори (ќе беа 5 но не смее да се повторува со првата цифра), на четвртото место имаме 4 избори, на петтото место имаме 3 избори, на шестото 3 избори и на седмото – 2 избори. Вкупно $4\cdot 5\cdot 4\cdot 4\cdot 3\cdot 3\cdot 2 = 5760$.

7. Се фрлаат 2 коцки. Колку можни исходи има?

- Има $\overline{V}_{2,6} = 6^2 = 36$ можности ако коцките се подредени („прва“ коцка и „втора“ коцка, или на пример едната е сина, а другата е црвена коцка и со тоа бојата ги прави различни, односно подреден пар). Ако не ги разликуваме коцките, тогаш имаме $\overline{C}_{2,6} = C_{2,7} = \frac{7!}{2!5!} = 21$ исходи.

8. Од влезот до излезот во еден град, по ред, има 40 семафори (со црвено, жолто и зелено светло). а) На колку начини тие светат во даден момент? б) На колку начини 25 од семафорите во даден момент светат зелено? в) Колку начини има, во даден момент да светат 12 црвени, од кои 1 е на влезот, а 1 на излезот од градот?

- а) Задачата сугерира дека семафорите претставуваат подредена 40-торка со компоненти кои можат да примат една од три вредности во даден момент и секако, може да има еднакви вредности. Значи имаме варијации со повторување $\overline{V}_{40,3} = 3^{40}$. (Забележи дека $k > n$ во случајов).

б) Со оглед дека се бара 25 семафори да бидат зелени без специфичен редослед кои се тие 25, треба за нив да се користат комбинации, т.е. 25 зелени од 40-те семафори можат да бидат распоредени на $C_{25,40}$ начини. Но, за секој избор на распоред на зелени, имаме 15 останати семафори кои можат да бидат црвени или жолти, и тоа како подредени, па значи $\overline{V}_{15,2} = 2^{15}$ начини. Следува дека има $C_{25,40} \cdot \overline{V}_{15,2}$ начини на распоред.

в) Ако 2 црвени се фиксираат (1 на влезот и 1 на излезот од градот), има $C_{10,38} = \frac{38!}{10!28!}$ начини останатите состојби на црвено да бидат распоредени, а бидејќи останатите 40−12=28 семафори ќе светат само жолто или зелено, за секој избор на црвено, има $\overline{V}_{28,2} = 2^{28}$ начини на распоред. Значи вкупно има $C_{10,38} \cdot \overline{V}_{28,2}$ начини на распоред.

9. Малите албуми за фотографии содржат 15 места за вметнување на фотографиите. а) На колку начини можеме да распоредиме 15 фотографии? б) На колку начини можеме да ги распоредиме фотографиите, ако сакаме 7-те од летување, 5-те од зимување и 3-те од прослави на празниците да бидат групирани заедно?

-а) Има $P_{15} = 15! = 1307674368000$ начини;

б) Има $P_{15}(7,5,3) = \frac{15!}{7!5!3!} = 360360$ начини.

10. Според плановите на тренерот на еден фудбалски тим било потребно да се освојат 7 бода за останување во лигата за 6 одиграни натпревари, при што победа носи 3 бода, а нерешено 1 бод. На колку начини може да се обезбеди потребниот број бодови?

- 7 бода може да се добијат од (3 бода · 2 натпревари) + (1бод · 1 натпревар) или од (3 бода · 1натпревар) + (1 бод · 4 натпревари). Ако тимот победи на 2 натпревари и одигра нерешено на 1, значи изгубил на 3 натпревари, а за сето тоа има $P_6(2,1,3)=\frac{6!}{2!1!3!}=60$ начини, а ако победи на 1 и одигра нерешено на 4 , значи изгубил 1 натпревар, а за тоа има $P_6(1,4,1)=\frac{6!}{1!4!1!}=30$ начини. Од сето ова следува дека тимот има 60 +30 = 90 начини да обезбеди точно 7 бода.

11. Колку анаграми можат да се направат од зборот
а) ФАКТОРИЕЛ; б) СТРУКТУРА ?

- а) Сите букви се различни, па има $P_9 = 9! = 362880$ анаграми;
б) Некои букви се повторуваат, и тоа Т - 2 пати, Р - 2 пати и У - 2 пати.
Буквите С, К, и А се јавуваат само еднаш, па има $P_9(2,2,2,1,1,1)=\frac{9!}{2!2!2!1!1!1!}=45360$ анаграми.

12. На колку начини можат 5 момчиња и 2 девојчиња да седат, така што девојчињата да не бидат една до друга?
- Во ситуацијата 2 девојчиња да седат една до друга (а за тоа има само 2 начина), треба девојчињата да ги сметаме како 1 објект. Затоа има вкупно $7! - 2\cdot 6! = 3600$ начини.

13. На колку начини може да седнат 5 момчиња и 5 девојчиња на 10 места, така што да нема од ист пол едно до друго?
- На првото место постојат 2 можности – да седне момче или да седне девојче. За момчињата има 5! распореди и за девојчињата има 5! распореди. Значи вкупно има $2\cdot 5!\cdot 5! = 28800$ начини да се разместат.

14. Од шпил со 52 карти се извлекуваат 3 карти. На колку начини може да се изврши изборот така што а) сите 3 карти се со иста вредност; б) сите 3 карти се со исти знак; в) Две се исти по вредност, а една е единица.
- а) $C_{3,4}\cdot 13 = 52$;
б) $C_{3,13}\cdot 4 = 1144$;
в) $C_{3,4} + C_{2,4}\cdot 12\cdot C_{1,4} = 292$.

15. Од шпил со 52 карти се извлекуваат 8 карти. На колку начини може да извлечеме а) точно 3 кеца; б) барем 3 кеца.

- а) Вкупно се 4 кеца во еден шпил, па извлекување на точно 3 кеца од 4 има $C_{3,4}=4$ начини. Останатите 5 се различни од кец, за кои имаме на располагање 52–4=48 карти, т.е. $C_{5,48}=\dfrac{48!}{5!43!}$. Вкупно има $C_{3,4}\cdot C_{5,48}$ начини.

б) Барем 3 кеца, значи 3 или 4 кеца, па можностите за точно 3 кеца и можностите за точно 4 кеца се собираат. Слично како под а) имаме $C_{3,4}\cdot C_{5,48}+C_{4,4}\cdot C_{4,48}$ начини.

16. На 5 дечиња им се подаруваат 10 различни играчки, така што секое од нив да добие по 2 играчки. На колку начини може да се направи тоа?

- На едно од 5-те деца се даваат 2 од 10-те играчки и за тоа има $C_{2,10}$ начини. Од останатите 8 играчки, 2 може да се поделат на друго дете и за тоа има $C_{2,8}$ начини. За следното дете има $C_{2,6}$ начини, потоа $C_{2,4}$ начини и за последното дете има $C_{2,2}$ начини. Значи вкупно има $C_{2,10}\cdot C_{2,8}\cdot C_{2,6}\cdot C_{2,4}\cdot C_{2,2}$ начини да се подарат играчките. Забелешка: Задачата се решава со комбинации, а не со варијации, бидејќи на децата не им е важно која е прва, а која втора играчка. Исто така, изборот на произволно дете е содржан во самото множење на комбинациите и не е потребно да се множи со пермутација од бројот на деца.

17. За извршување на некоја работа се јавиле 18 кандидати, од кои 7 биле жени. Треба да бидат избрани 9 од пријавените кандидати. На колку начини може да се изврши изборот ако во избраните кандидати треба да има барем 3 жени?

- Барем 3 жени значи: точно 3 жени, точно 4 жени, точно 5 жени, точно 6 жени или точно 7 жени. За точно 3 жени од 7, остануваат да се изберат 6 мажи од 11, итн., па има вкупно $C_{3,7}\cdot C_{6,11}+C_{4,7}\cdot C_{5,11}+C_{5,7}\cdot C_{4,11}+C_{6,7}\cdot C_{3,11}+C_{7,7}\cdot C_{2,11}=$ =40480 начини.

18. На рафт во маркет има пакувања млеко од 1литар со 0.9%, 1.5% и 3.2% масленост. На колку начини може да се купат 6 литри млеко?

- Од 3 вида млеко треба да се изберат 6 кутии, па имаме комбинации со повторување $\overline{C}_{6,3}=C_{6,8}=\dfrac{8!}{6!2!}=28$ начини.

19. Во една сендвичара прават хамбургер, чизбургер, тост и хот-дог. а) На колку начини можат да се нарачаат 10 сендвичи? б) На колку начини може 10 студенти да си купат сендвич? в) На колку начини 10 студенти би купиле сендвич ако тројца купуваат хамбургер, двајца чизбургер, четворица - тост и еден студент - хот-дог?

- а) Без оглед на редоследот и бројот на повторувања на видовите сендвичи, очигледно се работи за комбинации со повторување $\overline{C}_{10,4} = C_{10,13} = \dfrac{13!}{10!3!} = 286.$

б) Разликата со ситуацијата под а) е во тоа што студентите се различни луѓе па пермутациите (биекциите) студент-сендвич се вклучени и затоа во овој случај имаме варијации со повторување $\overline{V}_{10,4} = 4^{10} = 1048576.$

в) Имаме пермутации со повторување $P_{10}(3,2,4,1) = \dfrac{10!}{3!2!4!1!} = 12600$ т.е., повторно, важен е редоследот на доделување сендвич на студент.

20. Во продавница има 5 вида кафе, а сите пакувања се од по 200 g. На колку начини купувач може да купи 1 kg кафе?

- Купувачот треба да купи 5 пакувања кафе од 5 вида, па затоа имаме комбинации со повторување $\overline{C}_{5,5} = C_{5,9} = \dfrac{9!}{5!4!} = 126.$

21. Дадено е множеството од првите 20 природни броеви. а) Колку подмножества со 5 елементи има во кои бројот 5 е најмал? б) Колку подмножества со 5 елементи има во кои 5 не е најмалиот број? в) Колку подмножества со 5 елементи има во кои најмалиот елемент е помал од 5?

а) Знаеме дека 5 е еден од 5-те елементи на подмножествата, па останува да бираме 4 елементи. За нив го имаме ограничувањето дека мора да се со вредности од 6 до 20 (15 броеви). Значи, подмножества со бараниот услов има
$C_{4,15} = \dfrac{15!}{4!11!} = 1365.$

б) Вкупниот број на 5-елементни подмножества е $C_{5,20}$, а од нив имаме $C_{4,15}$ во кои бројот 5 е најмал (од а)). Значи, разликата $C_{5,20} - C_{4,15} = 14139$ го дава бројот на подмножества во кои бројот 5 не е најмал број.

в) Вкупниот број на 5-елементни подмножества е $C_{5,20}$, а бројот на 5-елементни подмножества во кои најмалиот елемент <u>не е помал </u>од 5, (т.е. поголем или еднаков на 5, односно броевите од 5 до 20 кои ги има 16 на број) изнесува $C_{5,16}$, па значи разликата $C_{5,20} - C_{5,16} = 11136$ го дава бројот на подмножества во кои најмалиот број <u>е помал</u> од 5.