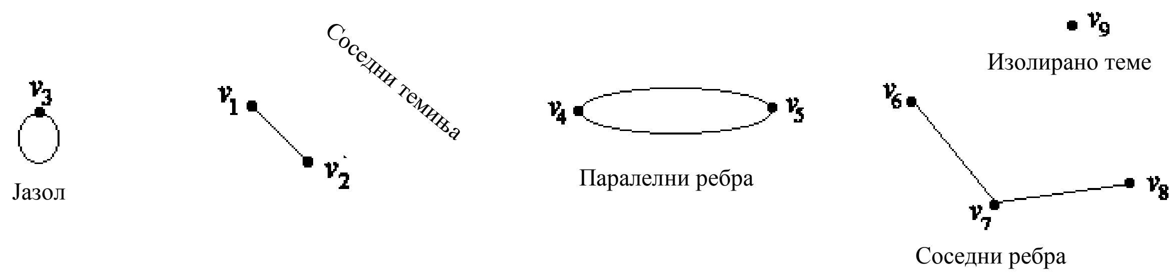
Графови

1. Вовед во графови

<u>Граф</u> е конечно множество точки наречени <u>темиња</u>, заедно со конечно множество линии наречени <u>ребра</u>, кои ги поврзуваат некои или сите точки. Поформално,

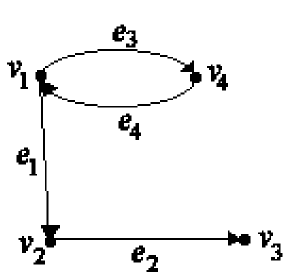
- Граф G се состои од конечно множество $V(G)$ од <u>темиња</u> и конечно множество $E(G)$ од <u>ребра</u>. (Ознаките V и E се првите букви од соодветните англиски називи vertices и edges).
- За секое ребро се подразбира множество кое содржи една или две точки – <u>крајни точки</u>.
- Ребро со само една крајна точка се вика <u>јазол</u> (или <u>лупа</u> од “loop”).
- Две различни ребра со истото множество крајни точки се викаат <u>паралелни ребра</u>.
- Две темиња кои се поврзани со ребро се викаат <u>соседни темиња</u>.
- Ребро се нарекува <u>инцидентно на</u> која било од своите крајни точки.
- Две ребра, инцидентни на иста крајна точка се викаат <u>соседни ребра</u>.
- Теме на кое нема инцидентни ребра се вика <u>изолирано теме</u>.
- Граф кој не содржи темиња се нарекува <u>празен граф</u> (граф со темиња е непразен).

Графовите сликовито се претставуваат со дијаграми во кои темињата се претставени со точки, а ребрата со линии. На пример:



- <u>Ориентиран граф</u> се состои од конечно множество $V(G)$ од темиња и конечно множество $D(G)$ од насочени ребра, каде што секое ребро е поврзано со *подреден пар* од темиња кои се негови крајни точки. Ознаката D е за “directed”. Ориентираните графови се познати и како <u>орграфови</u> (некаде и диграфови од “directed”).

  На пример, да го разгледаме следниот дијаграм:

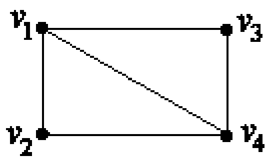


Множеството темиња е $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, а множеството ребра е $D(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Следнава табела го опишува односот ребра / крајни точки:

Ребра	Крајни точки
e_1	(v_1, v_2)
e_2	(v_2, v_3)
e_3	(v_1, v_4)
e_4	(v_4, v_1)

- <u>Прост граф</u> G е подреден пар (V, E) каде што V е конечно непразно множество темиња и E е конечно множество од ребра на графот и не содржи јазли(лупи) и паралелни ребра.

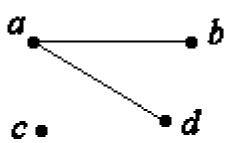
Пример. Дадениот граф G прикажан на долниот дијаграм,

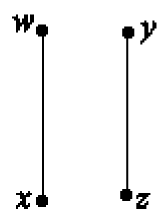


$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\})$

$G = (V, E)$ е прост граф.

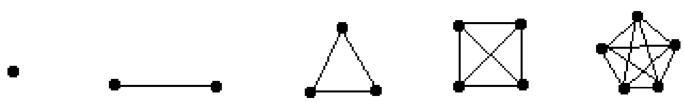
Покрај горниот пример, следниве дијаграми исто така претставуваат прости графови.





- Еден прост граф се вика <u>комплетен граф</u> ако кои било (секои) две темиња на графот се соседни. Комплетен граф со n темиња се означува со K_n.

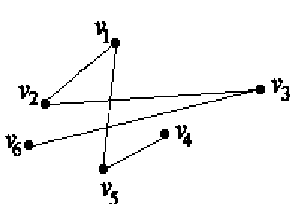
Следниве дијаграми претставуваат K_n за n = 1, 2, 3, 4, 5, соодветно:



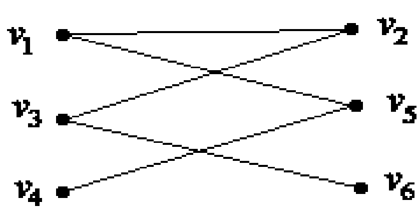
K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

- <u>Бипартитен граф</u> е прост граф G чие множество темиња може да се раздели на две непразни дисјунктни множества V_1 и V_2 така што темињата од V_1 може да бидат поврзани со темиња од V_2, но ниедно теме од V_1 не е поврзано со теме од самото V_1 и ниедно теме од V_2 не е поврзано со теме од самото V_2.

Пример. Графот од дијаграмот 1 е прецртан на поуреден начин на дијаграмот 2. Од вториот дијаграм се гледа дека графот е бипартитен со дисјунктните множества темиња $V_1 = \{v_1, v_3, v_4\}$ и $V_2 = \{v_2, v_5, v_6\}$.



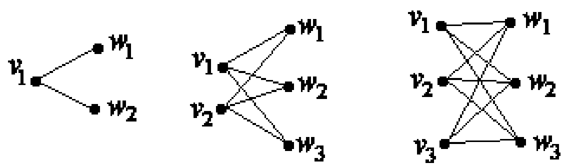
Дијаграм 1



Дијаграм 2

- <u>Комплетен бипартитен граф</u> на (m,n) темиња, означен с $K_{m,n}$ е прост граф со темиња v_1, v_2,...., v_m и w_1, w_2, ..., w_n кој ги задоволува следните услови:
За сите i, j = 1, 2, ..., m и за сите k, l = 1, 2, ..., n,
а) Постои ребро од секое теме v_i до секое теме w_k;
б) Не постои ребро од било кое теме v_i до било кое друго теме v_j;
в) Не постои ребро од било кое теме w_k до било кое друго теме w_l.

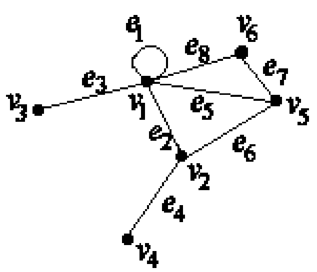
Бипартитните графови $K_{1,\,2}$, $K_{2,\,3}$ и $K_{3,\,3}$ се илустрирани подолу:



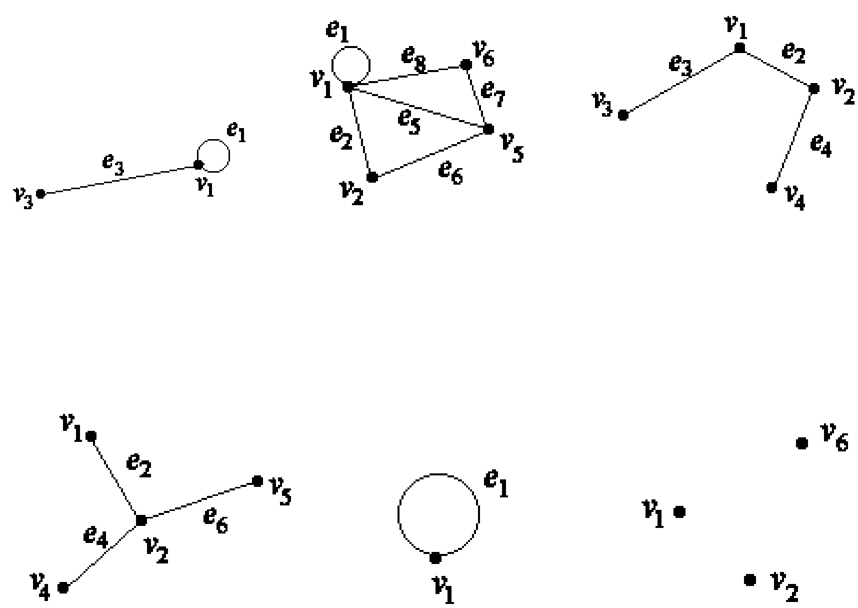
$K_{1,\,2}$ $K_{2,\,3}$ $K_{3,\,3}$

- Графот H е <u>подграф</u> од G ако множеството темиња на H е подмножество од множеството темиња на G и множеството ребра од H е подмножество од множеството ребра на G. Уште повеќе, секое ребро од H мора да ги има истите крајни точки како во G.

Пример. Примери за непразни подграфови на графот G прикажан лево се графовите прикажани десно:

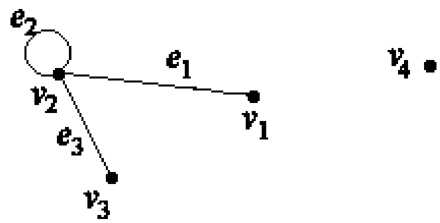


Граф G



- Темето v од даден граф G има <u>степен на теме</u> deg(v) кој го означува бројот на ребра инцидентни со темето v, при што ребро кое е јазол се смета дупло. Вкупниот <u>степен на графот</u> G е збирот од степените на сите темиња од G.

Пример. Да го најдеме степенот на секое теме, а потоа и степенот на следниот граф G:



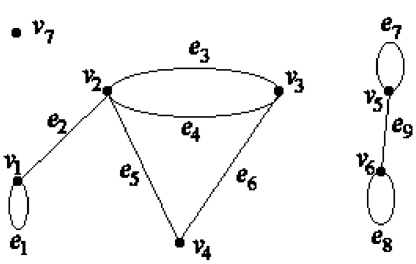
Имаме: $deg(v_1) = 1$ бидејќи e_1 е инцидентно на v_1.
$deg(v_2) = 4$ бидејќи e_1 и e_3 се инцидентни на v_2 и јазолот e_2 е исто така инцидентен на v_2 и додава 2 на степенот на v_2.
$deg(v_3) = 1$ бидејќи e_3 е инцидентно на v_3.
$deg(v_4) = 0$ бидејќи нема ребро што е инцидентно на v_4 (v_4 е изолирано теме).

Вкупниот степен на графот G изнесува $deg(v_1) + deg(v_2) + deg(v_3) + deg(v_4) = 1 + 4 + 1 + 0 = 6$.

- За степен на граф важи дека е парен број и изнесува двојно од бројот на ребра. (Во претходниот пример имавме 3 ребра и степенот на графот беше 6).

<u>Задачи</u>:

1. Врз основа на прикажаниот граф да се одговори на следните прашања:



а) Запиши го множеството темиња и множеството ребра и состави табела која го опишува односот ребра / крајни точки.
б) Најди ги сите ребра кои се инцидентни на v_2; сите соседни темиња на v_3; сите соседни ребра на e_5.
в) Најди ги сите јазли, сите паралелни ребра и сите изолирани темиња.
г) Најди ги сите темиња што се соседни сами на себе.

Одговор:

а) $V= \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$, $E= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$

Ребра	Крајни точки
e_1	$\{v_1\}$
e_2	$\{v_1, v_2\}$
e_3	$\{v_2, v_3\}$
e_4	$\{v_2, v_3\}$
e_5	$\{v_2, v_4\}$
e_6	$\{v_3, v_4\}$
e_7	$\{v_5\}$
e_8	$\{v_6\}$
e_9	$\{v_5, v_6\}$

б) - e_2, e_3, e_4 и e_5 се инцидентни на v_2.
- v_2 и v_4 се соседни на v_3.
- e_2, e_3, e_4, и e_6 се соседни на e_5.

в) - e_1, e_7 и e_8 се јазли.
- e_3 и e_4 се паралелни ребра.
- v_7 е изолирано теме.

г) v_1, v_5 и v_6 се соседни сами на себе.

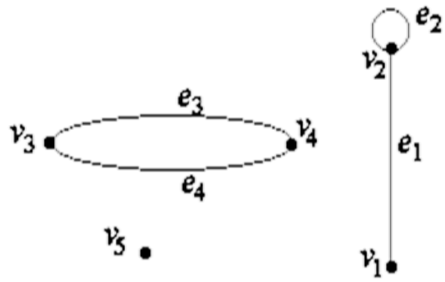
2. Нацртај граф според следниве податоци:

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

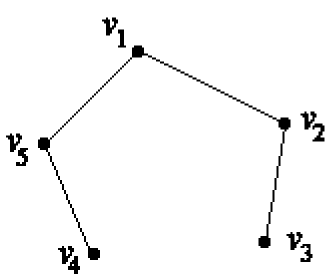
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

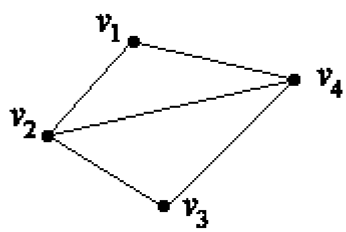
Однос ребра/крајни точки:	
ребра	**крајни точки**
e_1	$\{v_1, v_2\}$
e_2	$\{v_2\}$
e_3	$\{v_3, v_4\}$
e_4	$\{v_3, v_4\}$

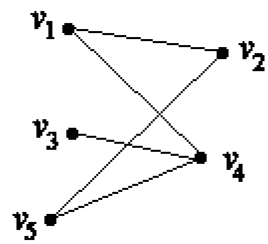
Одговор:



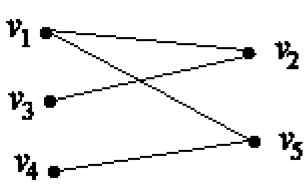
3. Провери кој од следните графови се бипартитни и прецртај ги на таков начин, што нивната бипартитна природа ќе биде евидентна:

а. 

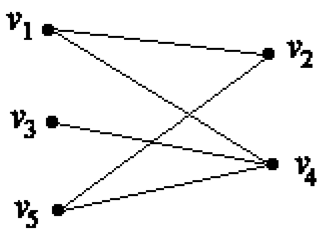
б. 

в. 

Одговор:

а. 

б. Ако претпоставме дека овој граф е бипартитен, тогаш неговото множество темиња би можело да се раздели во две заемно дисјунктни подмножества V_1 и V_2, така што темињата од секое подмножество да се врзани преку ребро само со темињата од другото подмножество, но не со темиња од истото подмножество. Бидејќи v_1 и v_3 се поврзани преку ребра и со v_2 и со v_4, v_2 и v_4 би морале да бидат во другото подмножество, V_2. Но, v_2 и v_4 се поврзани со ребро меѓу себе. Ова е во контрадикција со фактот дека ниедно теме од V_2 не е поврзано преку ребра со друго теме од V_2. Значи, првобитната претпоставка дека графот е бипартитен е погрешна, што значи, графот не е бипартитен.

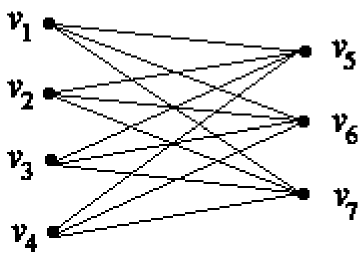
в. 

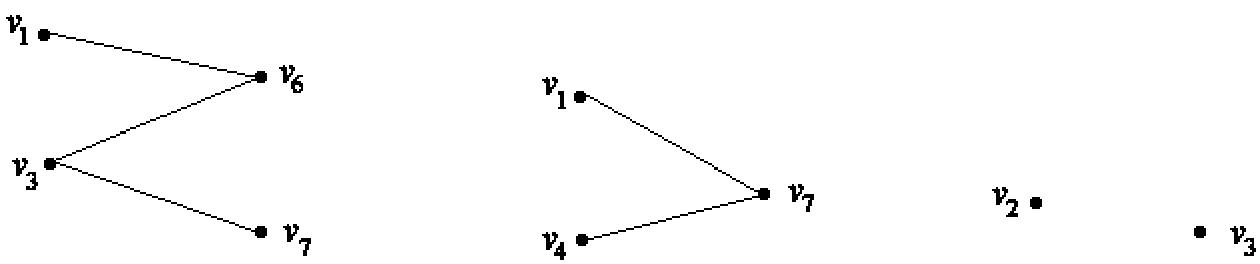
4. Со $K_{m,\,n}$ означувавме комплетен бипартитен граф на (m, n) темиња.

а. Нацртај $K_{4,\,3}$.

б. Нацртај три подграфови на $K_{4,\,3}$.

Одговор:

а. 

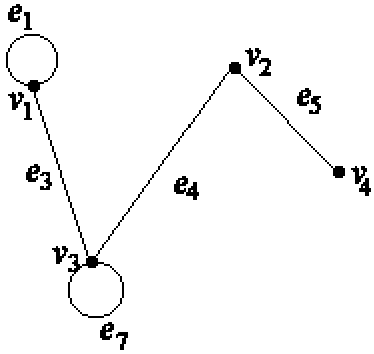
б. 

Се разбира, има уште неколку графови кои можат да бидат подграфови на $K_{4,\,3}$.

5. Нацртај граф со зададените податоци или објасни зошто таков граф не постои:

- а. Граф со 4 темиња со степени 1, 2, 3 и 4.
- б. Прост граф со 4 темиња со степени 1, 2, 2 и 3.
- в. Прост граф со 4 темиња со степени 1, 1, 3 и 4.

Одговор:

а. 

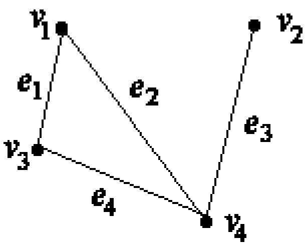
$deg(v_1) = 3$ (бидејќи e_3 е инцидентно на v_1 и јазолот e_1 е исто така инцидентен на v_1 па тој сам придонесува со 2 на степенот на v_1.)

$deg(v_2) = 2$ (бидејќи e_4 и e_5 се инцидентни на v_2.)

$deg(v_3) = 4$ (бидејќи e_3 и e_4 се инцидентни на v_3 и јазолот e_7 е исто така инцидентен на v_3.)

$deg(v_4) = 1$ (бидејќи e_5 е инцидентно на v_4.)

б.



$deg(v_1) = 2$ (бидејќи e_1 и e_2 се инцидентни на v_1.)

$deg(v_2) = 1$ (бидејќи e_3 е инцидентно на v_2.)

$deg(v_3) = 2$ (бидејќи e_1 и e_4 се инцидентни на v_3.)

$deg(v_4) = 3$ (бидејќи e_2, e_3, и e_4 се инцидентни на v_4.)

в. Да претпоставиме дека постои прост граф со 4 темиња со степени 1, 1, 3 и 4. Тогаш, темето со степен 4 би морало да биде поврзано со ребра со 4 различни темиња (без да се поврзуваат сами себе, поради претпоставката дека графот е прост – затоа и би немало јазли и паралелни ребра во графот). Ова е контрадикција со претпоставката дека графот има вкупно 4 темиња. Затоа, не постои прост граф со 4 темиња со степени 1, 1, 3 и 4.

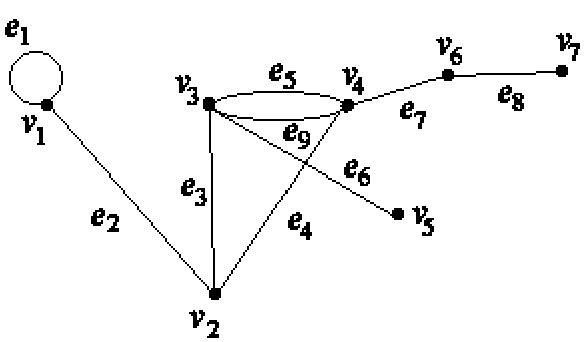
2. Сврзаност на графови

Нека u и v се темиња на еден граф G. Ги дефинираме следните поими:

Маршрута	Маршрута од u до v е конечна низа од соседни темиња и ребра на G и е од облик $v_0e_1v_1e_2 \ldots v_{n-1}e_nv_n$ каде што секое v_i претставува теме и секое e_i претставува ребро, $v_0 = u$ (почетната точка) и $v_n = v$, за сите $i = 1, 2, \ldots n$.
Патека	Патека од u до v е маршрута од u до v која не содржи повторено ребро. Патеката од u до v е во облик на маршрута $v_0e_1v_1e_2 \ldots v_{n-1}e_nv_n$, каде што сите e_i се различни (т.е. $e_i \neq e_k$ за кои било $i \neq k$), $v_0 = u$ (почетната точка) и $v_n = v$, за сите $i = 1, 2, \ldots n$.
Проста патека	Проста патека е патека од u до v која не содржи повторено теме. Простата патека е од облик на маршрута $v_0e_1v_1e_2 \ldots v_{n-1}e_nv_n$, каде што сите e_i се различни и сите v_j се различни (т.е. $v_j \neq v_p$ за кои било $j \neq p$), $v_0 = u$ (почетната точка) и $v_n = v$, за сите $i = 1, 2, \ldots n$.

Затворена маршрута	Затворена маршрута е маршрута која почнува и завршува во истото теме. Облик: $$v_0e_1v_1e_2 \ . \ . \ . \ v_{n\text{-}1}e_nv_n,$$ каде што $v_0 = v_n$.
Циклус	Циклус е затворена маршрута која не содржи повторено ребро. Облик: $$v_0e_1v_1e_2 \ . \ . \ . \ v_{n\text{-}1}e_nv_n,$$ каде што $v_0 = v_n$ и сите e_i се различни.
Прост циклус	Циклус кој нема ниедно повторено теме освен првото со последното.
Сврзан граф	Графот G е сврзан ако за дадени кои било две темиња u и v во G, постои маршрута од u до v .
Сврзана компонента на граф	Графот H е сврзана компонента на графот G ако 1. H е подграф на G; 2. H е сврзан; 3. Ниеден сврзан подграф од G не го содржи H како подграф, ниту пак содржи темиња и ребра кои се во H.

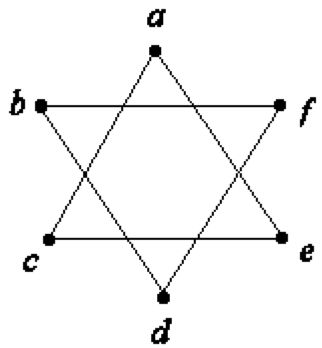
Пример. Даден е графот G со следниот дијаграм

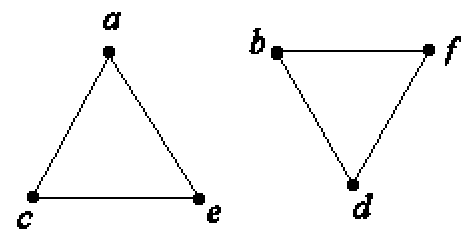


Маршрутата $v_2e_3v_3e_5v_4e_7v_6$ е **патека од v_2 до v_6** (не содржи повторено ребро, па затоа е патека). Маршрутата $e_2e_3e_9e_7e_7e_5e_6$ е само **маршрута од v_1 до v_5** и не е патека бидејќи има повторено ребро. Маршрутата $v_3v_4v_2v_3$ почнува и завршува со темето v_3 и **не содржи повторено ребро и повторено теме**, па според тоа е **прост циклус**. Маршрутата $v_5v_3v_4v_2v_3v_5$ е затворена маршрута со почеток и крај во темето v_5, но не е циклус ниту прост циклус затоа **што реброто e_6 и темето v_3 се повторуваат**.

Пример. Маршрута со должина 4 е на пример $v_2e_3v_3e_5v_4e_9v_3e_6v_5$(т.е. $e_3e_5e_9e_6$), а маршрута со должина 8 е на пример $v_1e_2e_3e_5e_9e_3e_4e_7e_8v_7$.

Пример. Следниот граф (лево) има две сврзани компоненти (десно):





(1) (2)

Нека *u* и *v* се темиња на еден граф *G*. Ги дефинираме следните поими:

Ојлеров циклус	<u>Ојлеров циклус</u> за *G* е циклус кој го содржи секое теме и секое ребро на *G*. Тоа е низа од соседни темиња и ребра на *G* која почнува и завршува во истото теме, секое теме од *G* учествува барем еднаш, а секое ребро од *G* учествува точно еднаш.
Ојлерова патека	<u>Ојлерова патека</u> од *u* до *v* е низа од соседни ребра и темиња која почнува во *u*, завршува во *v*, поминува низ секое теме од *G* барем еднаш и поминува по секое ребро на *G* точно еднаш.

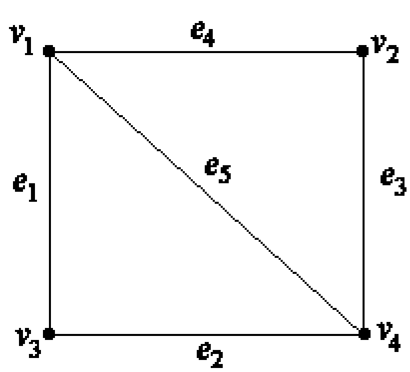
<u>Други својства:</u>

1. Ако графот има Ојлеров циклус, тогаш секое теме од тој граф има парен степен. (Спротивно, еден граф нема Ојлеров циклус ако некое теме од графот има непарен степен).

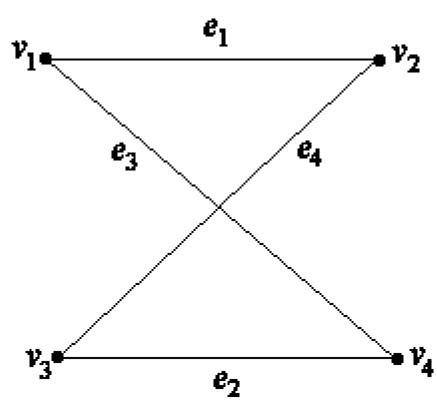
2. Постоење на Ојлерова патека од *u* до *v* е еквивалентно со: *G* е сврзан, *u* и *v* имаат непарен степен, и сите други темиња од *G* имаат парен степен.

Пример: Дадени се следните два графа:

Граф 1



Граф 2



Граф 1 содржи Ојлерова патека $v_1e_4e_3e_2e_1e_5v_4$.

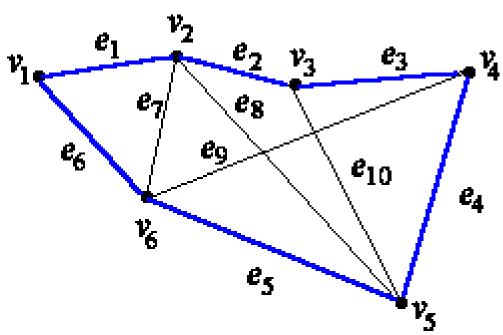
Граф 2 содржи Ојлеров циклус $v_1e_1e_4e_2e_3v_1$.

За даден граф G, Хамилтонова патека е проста патека која го содржи секое теме на G. Хамилтонов циклус е прост циклус кој го вклучува секое теме од G.

Други својства: Ако графот G има Хамилтонов циклус тогаш G има подграф H со следниве својства:

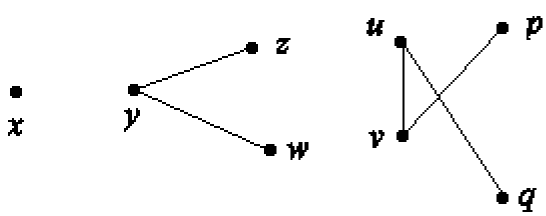
1. H го содржи секое теме од G;
2. H е сврзан;
3. H има ист број на ребра како и темиња;
4. Секое теме од H има степен 2.

Пример: На следниов граф, Хамилтоновиот циклус е означен со сино:

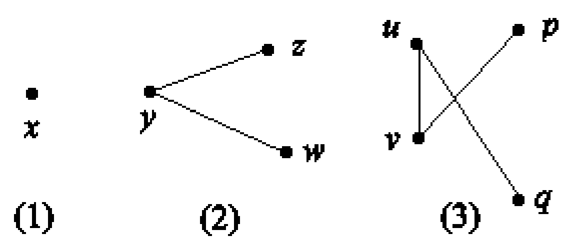


Задачи:

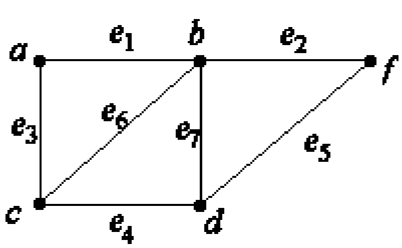
1. Најди ги сите сврзани компоненти на графот



Одговор: Графот има 3 сврзани компоненти:

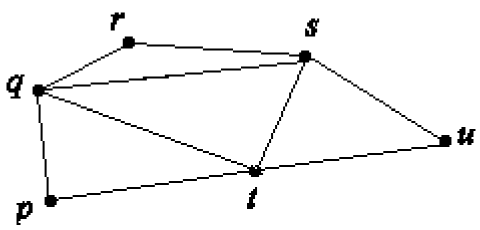


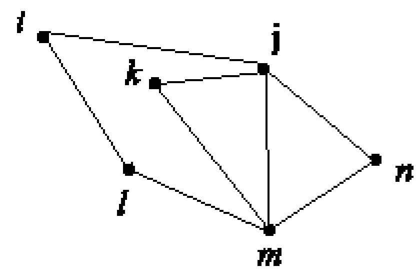
2. Даден е графот G подолу. Да се определи дали маршрутите $ae_1be_6ce_4de_5f$ и $abfdca$ се патеки, прости патеки, затворени маршрути, циклуси, прости циклуси или се само маршрути.



Одговор:
- $ae_1be_6ce_4de_5f$ е проста патека (без повторени темиња) и е маршрута од *a* до *f*.
- ***abfdca*** е прост циклус. $\boldsymbol{ae_1e_2e_5e_4e_3a}$, може да биде и патека која не содржи повторено ребро или теме освен првото и последното.

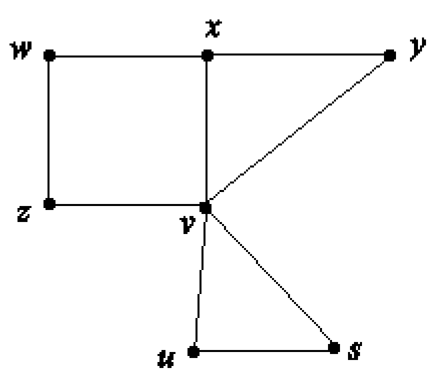
3. Кој од следниве графови содржи Ојлерови циклуси? Најди ги.

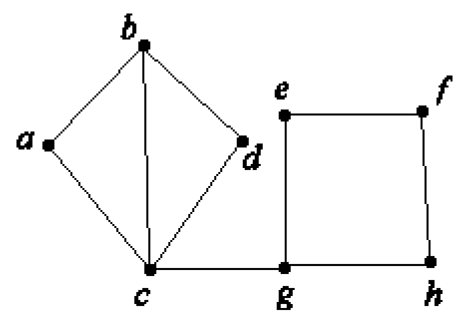
а) 

б) 

Одговор: а) Еден Ојлеров циклус е *tpqrsutqst*. б) Еден Ојлеров циклус е *njilmkjmn*.

4. Кој од следниве графови има Ојлерови патеки? Најди ги.

а) 

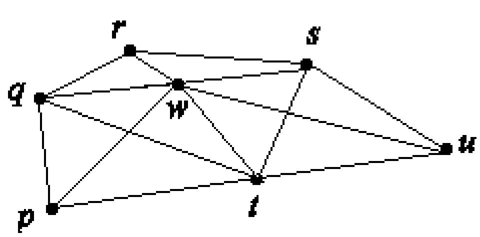
б) 

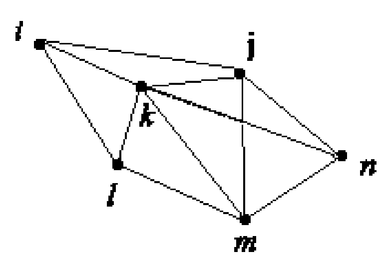
Одговор:

а) Една Ојлерова патека од *x* до *v* е *xwzvxyvsuv*.

б) Една Ојлерова патека од *b* до *g* е *bacbdcgefhg*.

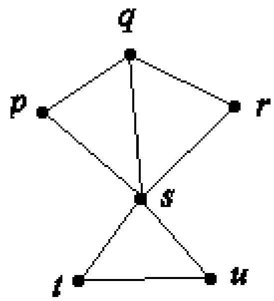
5. Најди Хамилтонов циклус за секој од следниве графови:

а) 

б) 

Одговор: а) *rwsutpqr* ; б) *kjnmlik*.

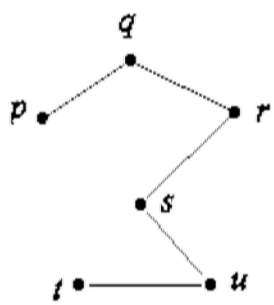
6. Докажи дека следниот граф нема Хамилтонов циклус.



Одговор: Да се потсетиме на својствата на Хамилтонов циклус: Ако графот G има Хамилтонов циклус тогаш G има подграф H со својствата

1. H го содржи секое теме од G;
2. H е сврзан;
3. H има ист број на ребра како и темиња;
4. Секое теме од H има степен 2.

Прво, лесно се забележува дека темето s има степен 5, па со цел да се формира подграф H кој ќе ги содржи сите барани својства, треба да се отстранат 3 ребра од s. Ако ги отстраниме ребрата под s, $\{s,t\}$ и $\{s,u\}$, подграфот H нема да биде сврзан, што е во спротивност со својството 2. Истиот проблем се јавува ако ги отстраниме трите ребра над s. Но, во согласност со својствата, прифатливо е а се отстанат 2 ребра над s, и 1 ребро под s, на пример $\{s, p\}$, $\{s, q\}$ и $\{s, t\}$. Во овој случај се добива ваков подграф:

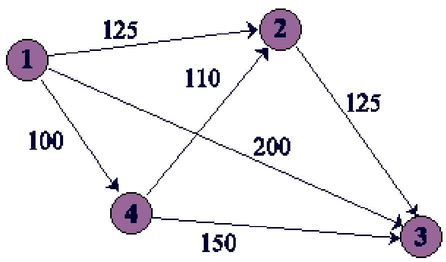


Меѓутоа сега не може да се поминат сите темиња и да се вратиме на почетното без повторување на некои темиња. Разгледувањето на останатите случаи со отстранување на 3 ребра доведуваат до заклучок дека се јавува истиот проблем, а дополнително се прекршува и својството 3.

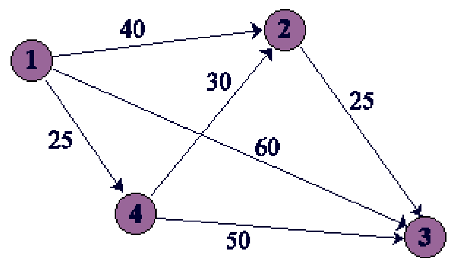
3. Матрично претставување на графови

Во воведниот дел беше споменат поимот оргграф, кој е кратенка за ориентиран граф. Ориентираноста се однесува на ребрата, имено се означува насоката на движење меѓу соседните темиња. На ориентирано ребро може да се „прикачи“ вредност, кое го нарекуваме цена на поминување од едно теме до наредното. На овој начин се добиваат тежински графови.

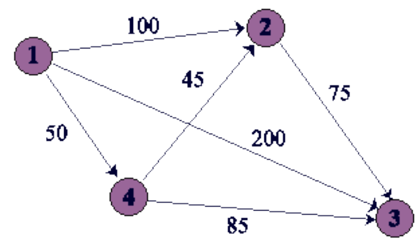
Пример. Следните 3 графа претставуваат авионски линии меѓу авионски терминали и сите се истиот дијаграм. Меѓутоа, на првиот граф се означени растојанијата, на вториот граф времињата, а на третиот граф цените.



А. Километри



Б. Минути



В. Евра

Ако ги гледаме графовите под А и Б, можеме да согледаме дека цената на директниот лет изразена преку поминати километри и минути од терминалот 1 до терминалот 3 е помала отколку на индиректниот лет преку терминалот 2. Но, во графот под В, цената на индиректниот лет преку терминалот 2 е помала отколку на директниот лет од 1 до 3.

<u>Тежинска матрица на соседство</u> е матрично претставување на тежински граф. Нека v_i и v_j се нумерирани темиња за $1 \leq i, j \leq 4$. Со w_{ij} ја означуваме <u>тежината</u> на ориентирано ребро $e = (v_i, v_j)$ при што претпоставуваме дека сите тежини се позитивни, $w_{ij} \geq 0$. Со M ја означуваме тежинската матрица на соседство и $M = [w_{ij}]$. За секое теме i во графот, $M_{ii} = 0$, а каде што не постои патека, $M_{ij} = \infty$.

Пример. Тежинската матрица на соседство за графот даден под В. погоре е следната:

i … j	1	2	3	4
1	0	100	200	50
2	∞	0	75	∞
3	∞	∞	0	∞
4	∞	45	85	0

<u>Матрица на соседство</u> е матрица составена само од единици и нули – ако постои патека меѓу две темиња, тогаш се запишува 1, а во спротивно 0. Кај орграфот, постоењето патека е ограничено со насоката на реброто.

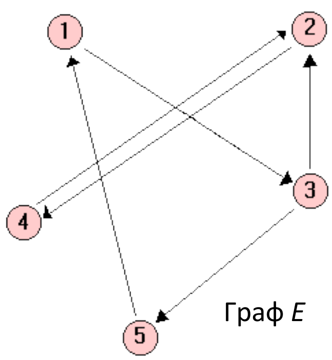
Пример. За матрицата под В. од погоре, матрицата на соседство е $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Варшалов алгоритам е процедура која испитува постоење на патека во орграф со помош на матрицата на соседство и логичко собирање (дисјункција, „или“, ознака $\vee$) и логичко множење (конјункција, „и“, ознака $\wedge$). Варшаловиот алгоритам е поефикасна варијанта од соодветниот обичен алгоритам за испитување на постоење на патека во орграф, кој се базира на формулата

$$A_{ij}^{(k)} = A_{ij}^{(k-1)} \vee (A_{ik}^{(k-1)} \wedge A_{kj}^{(k-1)}),$$

така што наместо конјункцијата, еквивалентно се користи услов („ако-тогаш“). Да го проследиме Варшаловиот алгоритам на следниот пример. Матрицата на соседство ја игра улогата на $A^{(0)}$, како почетна матрица.

Пример. Даден е следниот граф E и неговата матрица на соседство A:



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Секоја единица во матрицата може да се земе како ознака за „вистинито“ , а секоја нула за „невистинито“.

Формираме нова матрица $A^{(1)}$ на следниот начин. Ги пополнуваме елементите $A_{ij}^{(1)}$ така што за секоја редица во A која во колоната 1 има единица, ја додаваме (логички) редицата 1 на таа редица.

Во примеров, гледаме дека во првата колона, во петтата редица има 1. Тоа значи дека треба $A_{5j}^{(1)} = A_{5j} \vee A_{1j}$, т.е. на петтата редица ја додаваме првата редица. Значи,

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Формираме матрица $A^{(2)}$ на сличен начин. Ја гледаме втората колона во $A^{(1)}$, и на редиците каде што има 1 во таа (втората) колона, им ја додаваме (со $\vee$) втората редица. Во $A^{(1)}$ гледаме дека во втората колона, третата и четвртата редица имаат 1, па значи и на третата, и на четвртата редица, логички ќе им ја додадеме втората редица:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Слично, ќе ја формираме и матрицата $A^{(3)}$. Ја гледаме третата колона од матрицата $A^{(2)}$ и забележуваме единици во редиците 1 и 5. На овие редици им ја додаваме (со $\vee$) редицата 3:

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

На ред доаѓа формирање на матрицата $A^{(4)}$. Во матрицата $A^{(3)}$, четвртата колона е целата со единици. Значи, на сите останати редици ќе им ја додадеме со $\vee$ четвртата редица:

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Конечно, матрицата $A^{(5)}$ ќе ја добиеме со додавање на 5-тата редица на првата и третата редица:

$$A^{(5)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

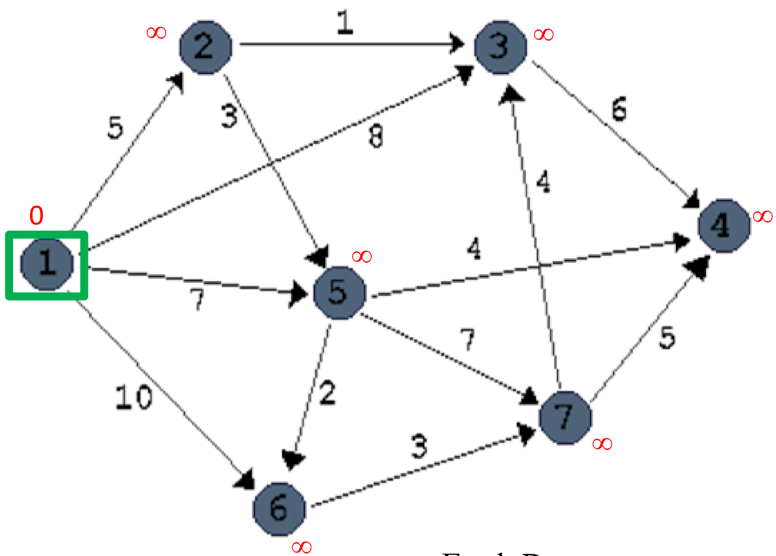
Ако ги гледаме местата на 1 во колоните на последнава матрица, правиме заклучок ДО кои темиња може да се стигне (на пример ако третата колона беше целата со 0, ќе заклучевме дека ДО третото теме не може да се стаса), а ако ги гледаме местата на 1 во редиците, заклучуваме ОД кои темиња водат патеки (на пример ако втората редица беше целата со 0, ќе заклучевме дека ОД второто теме не води ниедна патека). Во конкретниов пример, до второто и четвртото теме се стасува од сите темиња, додека до темињата 1, 3 и 5, преку сите тие три вклучувајќи ги и самите. До сите темиња има патека од темињата 1, 3 и 5, бидејќи редиците 1, 3 и 5 се само со единици.

<u>Алгоритам на Дикстра</u> е алгоритам за наоѓање на најкус пат од дадено теме до сите останати темиња во ориентиран (и неориентиран) тежински граф (со тежини >0). Разгледуваме прво пример.

Пример. Даден е ориентиран тежински граф D на следната страна. Темињата се дадени со множеството $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Сакаме да најдеме најкраток пат од темето 1 до секое од останатите темиња посебно. Всушност, постапката е појасна ако фиксираме како крајна цел едно теме, и тоа несоседно на 1, како што е на пример темето 7. Текот на постапката ќе биде следнава.

1. На сите *темиња* им припишуваме „привремени“ вредности. На почеток, ставаме 0 на почетното теме 1, а ∞ на сите останати темиња.

2. Формираме множество од посетени темиња. (На дијаграмите, посетените темиња ќе ги означуваме со зелено квадратче околу темето). На почеток, тоа е само првото теме, 1.



Граф *D*

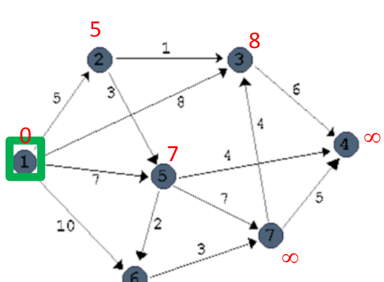
3. За тековното теме ќе се разгледува секое од неговите непосетени соседни темиња, така што за нив ќе се пресметува растојанието до тековното теме + растојанието од тековното до соседното теме. Ако тој збир е помал од тековната привремена вредност на темето, тогаш нова привремена вредност е тој збир.

4. Кога ќе завршиме со разгледување на сите соседи на тековното теме, тоа теме го отстрануваме од множеството на непосетени темиња, а на дијаграмот ќе го означиме со зелено квадратче, како посетено теме.

5. Кога ќе го означиме темето кое е крајна дестинација како посетено, алгоритамот завршува.

6. Темето со најмала привремена вредност може да се земе како следно „тековно теме" и за него се почнува од чекорот 3.

На горниот дијаграм, за почеток во темето 1 се означени првите 2 чекори. Да продолжиме со чекор 3. Соседни темиња на 1 се 2, 3, 5, 6. За овие темиња ќе определиме *нова* привремена вредност (која во овој момент е ∞), така што вредноста на темето 1 ја собираме со растојанијата (тежините) до секое од наведените соседни темиња. Секоја од вредностите, секако, е помала од ∞, па значи за темињата 2, 3, 5, 6 ги добиваме привремените вредности 0+5=5, 0+8=8, 0+7=7 и 0+10=10 соодветно.

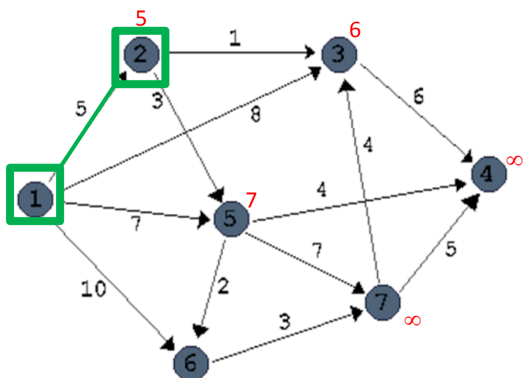


Граф *D*

Тоа е означено на дијаграмот лево. Сега, со темето 1 сме завршиле, па може да преминеме на разгледување на следно теме. Тоа е темето 2, бидејќи од сите непосетени темиња тоа има најмала привремена вредност (= 5). Темето 2 има 2 непосетени соседи, а тоа се темињата 3 и 5.

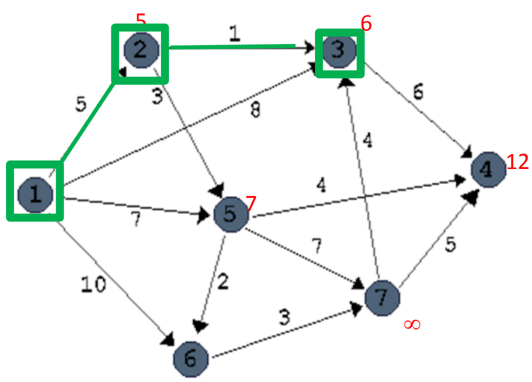
За темето 3 со тековна привремена вредност 8, доделуваме нова привремена вредност, а тоа е 5+1 = 6

(5 е привремената вредност на тековното теме 2, а 1 е растојанието од темето 2 до темето 3). За темето 5, привремна вредност е 7 и таа останува како помала, бидејќи 5+3=8 > 7. Темето 2 е посетено.



Граф *D*

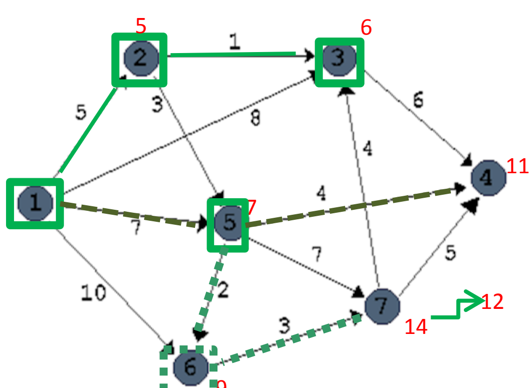
Од сите непосетени темиња, најмала привремена вредност во моментов (=6, дијаграмот лево најгоре) има темето 3. Единствено соседно теме на 3, е темето 4, чија привремена вредност, од ∞ се менува во 6+6=12. Темето 3 сега можеме да го сметаме за посетено.



Граф *D*

Од сите непосетени темиња најмала привремена вредност во моментов (=7, дијаграмот лево средина) има темето 5. Ова теме има 3 соседи, а тоа се темињата 4,6 и 7. Сега темето 4 има привремена вредност 12, но таа ќе се смени, бидејќи 7+4=11<12. Исто така, сега темето 6 има привремена вредност 10, но таа ќе се смени бидејќи 7+2=9<10. Привремената вредност ∞ за темето 7 секако ќе се смени сега: 7+7=14<∞. Сега темето 5 може да го сметаме за посетено. Соодветниот дијаграм кој ја покажува оваа моментална ситуација е прикажан лево најдолу.

Од сите непосетени темиња најмала привремена вредност (=9) во моментов има темето 6, па тоа ќе ни биде следно посетено теме. Темето 6 има само 1 сосед, а тоа е темето 7. Во моментов, привремената вредност на 7 е 14, но таа ќе се смени бидејќи 9+3=12<14. Темето 6 може да го сметаме за посетено.



Граф *D*

Темињата 4 и 7 се непосетени. Од двете, темето 4 има помала привремена вредност (11<12). Но, тоа теме нема соседи и нема што понатаму да се разгледува за него. Може да сметаме дека темето 4 е посетено.

Темето 7 има припишана привремена вредност 12. Тоа значи дека најкусата патека од 1 до 7 е: 1→5→6→7.

Соодветно се покажани и најкусите патеки до другите темиња од избраното теме 1. Така, најкусата патека
-од 1 до 2 е 1→2 (нема друга),
-од 1 до 3 е 1→2→3 (не е 1→3),
-од 1 до 4 е 1→5→4 (не е 1→2→3→4),
-од 1 до 5 е 1→5 (не е 1→2→5),
-од 1 до 6 е 1→5→6 (не е 1→6).

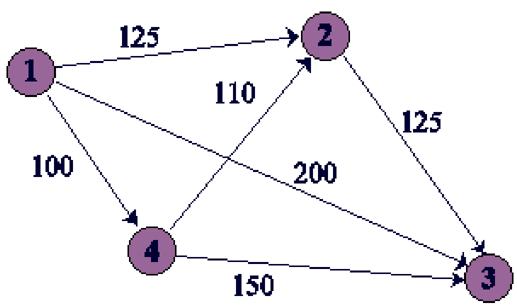
Постепените промени на привремените вредности на секое од темињата при избрано теме (во примеров, темето 1) може пократко да се прикажат во квадратна матрица, која всушност претставува табеларна евиденција на измените на секоја од привремените вредности и се пополнува редично.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 & \infty & 7 & 10 & \infty \\ 0 & 5 & 6 & \infty & 7 & 10 & \infty \\ 0 & 5 & 6 & 12 & 7 & 10 & \infty \\ 0 & 5 & 6 & 11 & 7 & 9 & 14 \\ 0 & 5 & 6 & 11 & 7 & 9 & 12 \\ 0 & 5 & 6 & 11 & 7 & 9 & 12 \\ 0 & 5 & 6 & 11 & 7 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

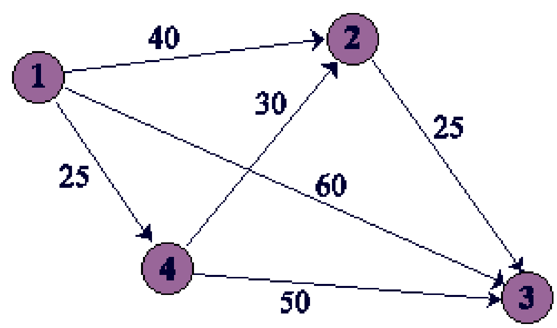
Прикажаниот алгоритам може општо да се испише и со структуриран псевдокод, со цел полесно конструирање на компјутерска програма во некој јазик.

Задачи:

1. Да се запишат тежинските матрици на соседство за дадените графови



А. Километри



Б. Минути поминат пат

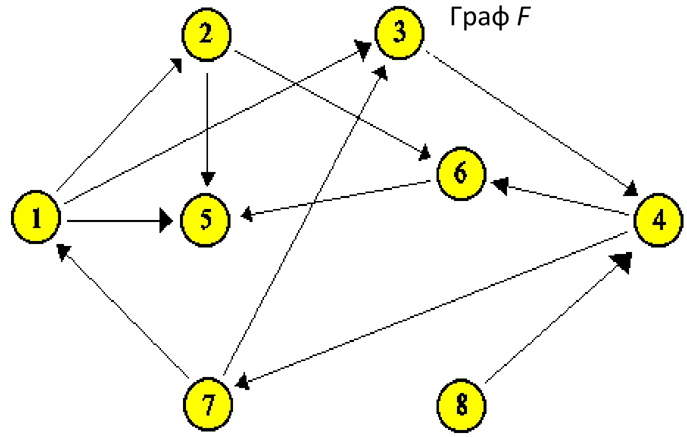
Одговор:

А.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 125 & 200 & 100 \\ \infty & 0 & 125 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 110 & 150 & 0 \end{bmatrix}$$

Б.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 40 & 60 & 25 \\ \infty & 0 & 25 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 30 & 50 & 0 \end{bmatrix}$$



2. Примени го Варшаловиот алгоритам на графот

Одговор:

F^0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	0	1	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0
7	1	0	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	1	0	0	0	0

F^1	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	0	1	0	0	0
2	0	0	0	0	1	1	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0
7	1	1	1	0	1	0	0	0
8	0	0	0	1	0	0	0	0

F^2	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	0	1	1	0	0
2	0	0	0	0	1	1	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0
7	1	1	1	0	1	1	0	0
8	0	0	0	1	0	0	0	0

F^3	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	1	1	1	0	0
2	0	0	0	0	1	1	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	0	0
8	0	0	0	1	0	0	0	0

F^5	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	1	1	1	1	0
2	0	0	0	0	1	1	0	0
3	0	0	0	1	0	1	1	0
4	0	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1	0
8	0	0	0	1	0	1	1	0

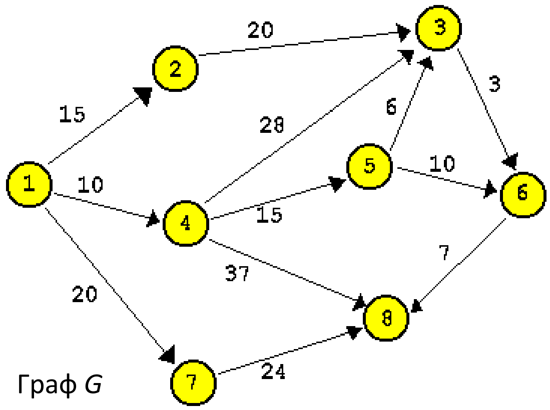
F^7	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	0
2	0	0	0	0	1	1	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1	0
4	1	1	1	1	1	1	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1	0
8	1	1	1	1	1	1	1	0

F^4	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	1	1	1	1	0
2	0	0	0	0	1	1	0	0
3	0	0	0	1	0	1	1	0
4	0	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1	0
8	0	0	0	1	0	1	1	0

F^6	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	1	1	1	1	0
2	0	0	0	0	1	1	0	0
3	0	0	0	1	1	1	1	0
4	0	0	0	0	1	1	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1	0
8	0	0	0	1	1	1	1	0

F^8	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	0
2	0	0	0	0	1	1	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1	0
4	1	1	1	1	1	1	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1	0
8	1	1	1	1	1	1	1	0

3. Користејќи го алгоритамот на Дикстра, најди го најкусиот пат од темето 1 до темето 8 на графот G:

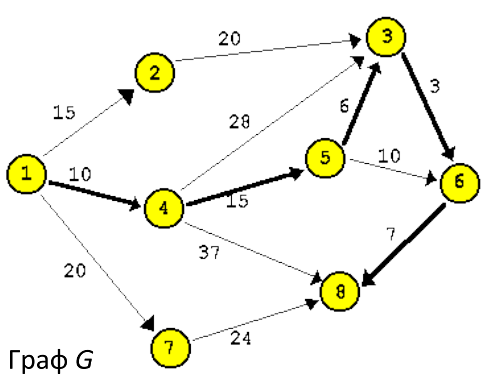


Граф *G*

Одговор: Искористи ја следава табела

Чекор	*w*	Δ(*w*)	Δ(1)	Δ(2)	Δ(3)	Δ(4)	Δ(5)	Δ(6)	Δ(7)	Δ(8)
1	--	--	0	15	∞	10	∞	∞	20	∞
2	4	10	0	15	38	10	25	∞	20	47
3	2	15	0	15	35	10	25	∞	20	47
4	5	25	0	15	35	10	25	35	20	47
5	7	20	0	15	31	10	25	35	20	44
6	3	31	0	15	31	10	25	34	20	44
7	6	34	0	15	31	10	25	34	20	41
8	8	41	0	15	31	10	25	34	20	41

На следниот дијаграм е означен најкусиот пат од 1 до 8:



Граф *G*