Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Машински факултет

# ВИБРАЦИИ ВО МАШИНСТВОТО

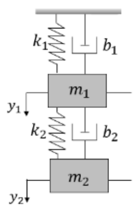
## 5. ОСЦИЛАЦИИ НА СИСТЕМИ СО 2 И ПОВЕЌЕ СТЕПЕНИ НА СЛОБОДА

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски



## 5.5. СЛОБОДНИ ПРИДУШЕНИ ВИБРАЦИИ НА СИСТЕМ СО 2 СТЕПЕНИ НА СЛОБОДА

Диференцијалните равенки на движењето наједноставно ќе се добијат со примена на Даламберов принцип за секоја маса




$$m_1\ddot{y}_1 + b_1\dot{y}_1 + k_1 y_1 + b_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_2(y_1 - y_2) = 0$$
$$m_2\ddot{y}_2 + b_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_2(y_2 - y_1) = 0$$

или

$$m_1\ddot{y}_1 + (b_1 + b_2)\dot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - b_2\dot{y}_2 - k_2 y_2 = 0$$
$$m_2\ddot{y}_2 + b_2\dot{y}_2 + k_2 y_2 - b_2\dot{y}_1 - k_2 y_1 = 0$$



Решението на линеарните диференцијални равенки кои математички го дефинираат системот се претпоставуваат од облик:

$$y_1 = C_1 e^{rt}$$
$$y_2 = C_2 e^{rt}$$

Можните решенија и нивните изводи се заменуваат, по што се добива систем хомогени линеарни алгебарски равенки во однос на непознатите амплитуди $C_1$ и $C_2$.

$$[m_1 r^2 + (b_1 + b_2)r + k_1 + k_2]C_1 - (b_2 r + k_2)C_2 = 0$$
$$(m_2 r^2 + b_2 r + k_2)C_2 - (b_2 r + k_2)C_1 = 0$$

Системот е опишан со две алгебарски равенки кои имаат решение кога детерминантата на системот е еднаква на нула.

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} [m_1 r^2 + (b_1 + b_2)r + k_1 + k_2] & -(b_2 r + k_2) \\ -(b_2 r + k_2) & (m_2 r^2 + b_2 r + k_2) \end{vmatrix} = 0$$

Со решавање на оваа детерминанта се добива карактеристичната равенка на системот:

$$(m_1 m_2 + m_1 b_2) r^4 + (b_1 m_2 + m_2 b_2) r^3 + (2k_1 m_2 + m_2 k_2 + b_1 b_2) r^2 + (b_2 k_1 + k_2 b_1) r + k_1 k_2 = 0$$

Корените на карактеристичната равенка може да бидат реални или комплексни. Ако корените се заменат во претпоставените решенија се добива решението на диференцијалните равенки или одѕивот на системот

$$y_1 = C_{11} e^{r_1 t} + C_{12} e^{r_2 t} + C_{13} e^{r_3 t} + C_{14} e^{r_4 t}$$
$$y_2 = C_{21} e^{r_1 t} + C_{22} e^{r_2 t} + C_{23} e^{r_3 t} + C_{24} e^{r_4 t}$$

Ако корените се реални и негативни броеви, тогаш масите вршат придушено апериодично движење. Ова е случај кога отпорите се многу големи, односно придушувањето на системот е над критично.



Во случај кога отпорите на двата придушувачи се мали, сите четири корени ќе бидат комплексни со негативен реален дел (комплексно конјугирани), а масите ќе опишуваат придушено осцилаторно движење. Комплексно конјугираните корени го имаат следниов облик:

$$r_1 = -\xi_1 - \omega_{n1} i$$
$$r_2 = -\xi_1 + \omega_{n1} i$$
$$r_3 = -\xi_2 - \omega_{n2} i$$
$$r_1 = -\xi_2 + \omega_{n2}$$

Со замена на овие изрази и примена на Ојлеровите равенки се добива:

$$y_1 = e^{-\xi_1 t}(C_{11} e^{\omega_{n1} t} + C_{12} e^{-\omega_{n1} t}) + e^{-\xi_2 t}(C_{13} e^{\omega_{n2} t} + C_{14} e^{-\omega_{n2} t})$$
$$y_2 = e^{-\xi_1 t}(C_{21} e^{\omega_{n1} t} + C_{22} e^{-\omega_{n1} t}) + e^{-\xi_2 t}(C_{23} e^{\omega_{n2} t} + C_{24} e^{-\omega_{n2} t})$$

односно:

$$y_1 = e^{-\xi_1 t}(C_{11} cos\omega_{n1} t + C_{12} sin\omega_{n1} t) + e^{-\xi_2 t}(C_{13} cos\omega_{n2} t + C_{14} sin\omega_{n2} t)$$
$$y_2 = e^{-\xi_1 t}(C_{21} cos\omega_{n1} t + C_{22} sin\omega_{n1} t) + e^{-\xi_2 t}(C_{23} cos\omega_{n2} t + C_{24} sin\omega_{n2} t)$$



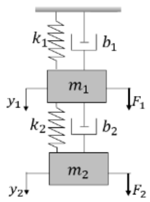
Постои и случај кога двата корени се конјугирано комплексни, а другите два реални и негативни. Во тој случај движењето на масите ќе биде сума од осцилаторно и не осцилаторно движење:

$$y_1 = e^{-\xi_1 t}(C_{11} cos\omega_{n1} t + C_{12} sin\omega_{n1} t) + C_{13} e^{r_3 t} + C_{14} e^{r_4 t}$$
$$y_2 = e^{-\xi_1 t}(C_{21} cos\omega_{n1} t + C_{22} sin\omega_{n1} t) + C_{23} e^{r_3 t} + C_{24} e^{r_4 t}$$

## 5.6. ПРИНУДНИ ПРИДУШЕНИ ВИБРАЦИИ НА СИСТЕМ СО 2 СТЕПЕНИ НА СЛОБОДА

Ако на една од масите дејствува некој надворешна сила, тогаш двете маси вршат принудни осцилации.

На прикажаниот систем на двете маси поодделно дејствуваат надворешни нарушувачки сили $F_1 sin\Omega t$ и $F_2 sin\Omega t$, соодветно. Равенките на движење за овие две маси го имаат следниов облик:




$$m_1\ddot{y}_1 + (b_1+b_2)\dot{y}_1 + (k_1+k_2)y_1 - b_2\dot{y}_2 - k_2 y_2 = F_1 sin\Omega t$$

$$m_2\ddot{y}_2 + b\dot{y}_2 + k_2 y_2 - b_2\dot{y}_1 - k_2 y_1 = F_2 sin\Omega t$$



Ако се запишат равенките во матрична форма:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1+b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 sin\Omega t \\ F_2 sin\Omega t \end{bmatrix}$$

Равенките имаат матрична форма, па со користење на матрично означување конечната форма на равенката го има следниов облик:

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + Ky = f$$

Каде што M е масена матрица, C е матрица на придушувањето и K е матрица на крутоста.

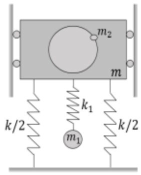
Матричното претставување овозможува користење на математички операции со матрици за добивање на одговорот на системот.

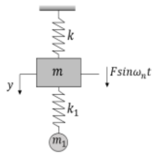


## 5.7. ДИНАМИЧКИ АБСОРБЕР

Постигнувањето на состојба на мирување на масата на која дејствува нарушувачка сила, кај систем со два степени на слобода е од посебен практичен интерес.

Доколку машина е монтирана на еластична подлога и се наоѓа во резонанса $\omega_n^2 = k/m$, за да се намалат осцилациите на машината може да се додаде помошен систем со маса $m_1$ и крутост $k_1$ со цел машината да се доведе до состојба на мирување.



Овој додаден систем со маса $m_1$ и крутост $k_1$ се нарекува динамички апсорбер и истиот обезбедува при добро проектирани параметри системот да обезбеди мирување на масата на која дејствува нарушувачката сила, кога силата е со фреквенција еднаква на сопствената (резонантно подрачје).

Равенките на движење за овој систем се:

$$\begin{cases} m\ddot{y} + ky + k_1(y - y_1) = F\sin\omega\ t \\ m_1\ddot{y}_1 + k_1(y_1 - y) = 0 \end{cases}$$

односно:

$$\ddot{y} + ay + by_1 = q\sin\omega\ t$$

$$\ddot{y}_1 + a_1y_1 - a_1y = 0$$

каде што:

$$a = \frac{k + k_1}{m}; \quad b = \frac{k_1}{m}; \quad a_1 = \frac{k_1}{m_1}; \quad q = \frac{F}{m}.$$



Стационарните принудни осцилации за масите се определуваат со партикуларните интеграли од:

$$y = B\sin\omega\ t$$

$$y_1 = B_1\sin\omega\ t$$

Со замена се добива:

$$B\left(a - \omega^2\right) - bB_1 = q$$

$$B_1\left(a_1 - \omega^2\right) - a_1B_1 = 0$$

Од каде:

$$B = \frac{q\left(a_1 - \omega^2\right)}{\left(a - \omega^2\right)\left(a_1 - \omega^2\right) - a_1b}$$

$$B_1 = \frac{qa_1}{\left(a - \omega^2\right)\left(a_1 - \omega^2\right) - a_1b}$$



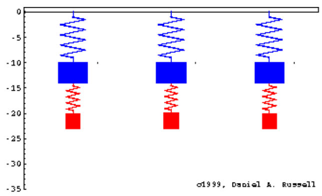
Екстремни бескрајни вредности амплитудите добиваат кога именителот е еднаков на нула, а тоа ќе биде ако $\omega\ = p_1$ и $\omega\ = p_2$, бидејќи тогаш именителот се трансформира во фреквентна равенка:

$$(a - p^2)(a_1 - p^2) - ba_1 = 0$$

Ако $\omega^2\ = a_1 = \frac{k_1}{m_1} = p_a^2$, амплитудата на масата $m$ ќе биде нула:

$$B = 0; \qquad B_1 = -\frac{q}{b} = -\frac{F}{k_1} = -y_{st1}$$

Според тоа, ако помошниот систем се избере така што ќе ја задоволува равенката $\omega^2\ = \frac{k_1}{m_1}$ машината со маса $m$ ќе мирува, а на фундаменталот нема да се пренесува никаква променлива сила.






Апсорбирањето на осцилациите од масата на која дејствува нарушувачката сила се постигнува бидејќи при осцилирање на апсорберот по законот

$y_1 = B_1 sin\omega \quad t = -\frac{F}{k_1} sin\omega \quad t,$

во пружината $k_1$ се појавува еластична сила која е спротивна по насока, а иста по интензитет со нарушувачка сила:

$$F_{el} = y_1 k_1 = -F sin\omega \quad t.$$

Тоа значи дека создадената еластична сила во пружината $k_1$ ја урамнотежува нарушувачката сила.

Динамичкиот апсорбер се применува во случаите кога основниот систем работи во или блиску до резонансната област