



Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Машински факултет

МЕХАНИКА 1

1. ВОВЕДНИ ИЗЛАГАЊА

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски
Кабинет: 207
Приемни термини:



МАШИНСКИ
ФАКУЛТЕТ
СКОПЈЕ

МЕХАНИКА 1
Проф. д-р Виктор Гаврилоски



Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Машински факултет

МЕХАНИКА 1

1а. ЗА ПРЕДМЕТОТ

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски



МАШИНСКИ
ФАКУЛТЕТ
СКОПЈЕ

МЕХАНИКА 1
Проф. д-р Виктор Гаврилоски

ЦЕЛ НА ПРЕДМЕТОТ:

Целта на предметот е да се запознаат студентите со концептот на механиката при услови на мирување на телата (статички услови)

ОСНОВНА ЛИТЕРАТУРА:

1. Р. Јосифовска, **Механика 1 – Статика**, Скопје 1993
2. З.Петревски, В.Гаврилоски, Х.Мицкоски, **Статика – задачи**, Скопје 2011

ДОПОЛНИТЕЛНА ЛИТЕРАТУРА:

предавања и вежби од други инженерски факултети



МАШИНСКИ
ФАКУЛТЕТ
СКОПЈЕ

МЕХАНИКА 1
Проф. д-р Виктор Гаврилоски

ОРГАНИЗАЦИЈА НА ПРЕДМЕТОТ:

предавања: 2 часа предавања неделно посветени на теоретските основи кои помагаат за правилно и полесно решавање на зададените проблеми

вежби: 2 часа вежби неделно посветени на решавање на задачи како дополнување на примерите кои ќе се решаваат за време на предавањата

корекциски вежби: 1 часа неделно посветен за прашања од страна на студентите и за корекција на задачите кои се зададени за самостојно решавање (програмски задачи)

ПРОВЕРКА НА ЗНАЕЊАТА И ОЦЕНУВАЊЕ:

тестови / колоквиуми:

- 2 теста (8-ма и 14 та недела)
- се решаваат три зададени задачи (од кои една за потпис) и се одговара на две теоретски прашања
- присуството е задолжително

услов за потпис:

- освоено минимум 50 % од поените на задачата за потпис
- освоено минимум 30 % од поените за секој тест поединечно

ИСПИТИ:

- право на испит имаат само студентите кои добиле потпис
- испитите се организираат во три сесии во текот на годината
- се решаваат три до четири зададени задачи и се одговара на две до три теоретски прашања

ДРУГИ ИНФОРМАЦИИ:

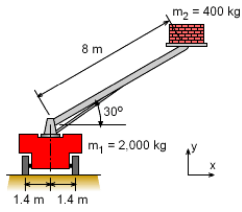
присуство на предавања и вежби:

- присуството е задолжително;
- секој студент на секој час треба да има тетратка, прибор за пишување (молив, гума), лењири (два триаголника) и дигитрон;
- на часовите мора да се почитува редот и дисциплината

материјали од предавања и вежби:

- материјалите од предавањата ќе бидат објавени на web - страната на МФС www.mf.edu.mk ;

ЗОШТО Е ПОТРЕБНА МЕХАНИКАТА ?



Дали дигалката во позицијата дадена на сликата е стабилна или може да се преврти?

Што може да се случи ако принципите на статиката не се применат правилно?





Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Машински факултет

МЕХАНИКА 1

16. ОПШТО ЗА МЕХАНИКАТА

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски

1.1. ШТО Е МЕХАНИКА?

Механиката е наука која ги опишува и предвидува условите на мирување или движење на материјалните тела изложени на дејство на различни сили, како и нивното взаемно дејство.

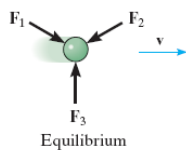


1.2. ОСНОВНИ ТЕРМИНИ

- **Положба во просторот**: ја определува местоположбата на дадена точка во просторот преку нејзините три координати во однос на референтна точка - координатен почеток.
- **Време**: служи за дефинирање на настаните и редоследот на нивни случувања.
- **Маса**: претставува мерка на количина на материја и служи за споредба на карактеристиките на телата (на пр. влијание на земјиното забрзување врз телата, отпорот – инерцијата при движење и сл.)
- **Сила**: служи за прикажување на дејството на едно тело врз друго. Силата е големина која се карактеризира со точка на дејствување, големина, правец и насока, односно е векторска големина.

1.3. ОСНОВНИ ЗАКОНИ НА МЕХАНИКАТА?

- **I Њутнов закон**: Секое материјално тело останува во состојба на мирување или рамномерно праволиниско движење сè додека на телото не дејствува некоја сила и не ја промени таа положба.

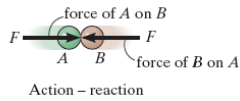


- **II Њутнов закон**: Тело ќе има забрзување пропорционално на силата која дејствува.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$



- **III Нютнов закон:** Силите на акција и реакција помеѓу две тела имаат ист интензитет и ист правец на дејствување, но спротивни насоки.



- **Нютнов закон за гравитација:** Две тела се привлекуваат со еднакви, но спротивни сили.

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad W = mg, \quad g = \frac{GM}{R^2}$$

F = сила на гравитација помеѓу две тела
 G = универзална гравитациона константа
 M, m = маси на секоје од телата
 r = растојание помеѓу двете тела



1.4. ЕДИНИЦИ МЕРКИ - "SI" МЕРЕН СИСТЕМ?

- **Основните параметри:** Должина, време, маса и сила.
- **Интернационален Систем на единици мерки (SI)**
 - Основни големини и единици мерки
 - Должина метар [m]
 - Време секунда [s]
 - Маса килограм [kg]
 - Изведени големини и единици мерки (сила, брзина, забрзување итн.)

$$F = ma$$

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg}) \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

ПРЕФИКСИ КАЈ ЕДИНИЦИТЕ МЕРКИ

SI Симбол	Префикс	Експоненцијална форма
G	гига	10 ⁹
M	мега	10 ⁶
k	кило	10 ³
m	мили	10 ⁻³
μ	микро	10 ⁻⁶
n	нано	10 ⁻⁹

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$$

$$1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ kN} = 1000 \text{ N}$$

$$1 \text{ MN} = 1000 \text{ kN}$$

$$1 \text{ MN} = 1000000 \text{ N}$$



МЕХАНИКА 1

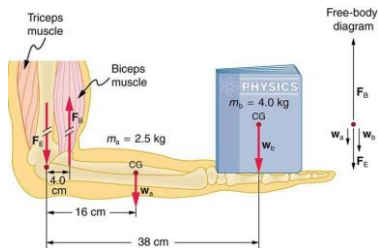
1в. ЗАДАЧИ НА СТАТИКАТА

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски

1.5. ШТО Е СТАТИКА ?

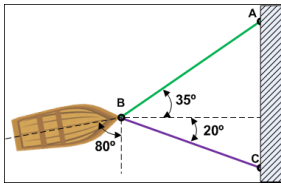
- Статиката е дел од механиката која ја изучува рамнотежата на материјалните тела под дејство на силите
- Рамнотежа на тело е мирување на тоа тело во однос на друго тело. (апсолутна/релативна рамнотежа)
- Сила е количинска мерка за механичкото заемно дејство меѓу материјалните тела. (Причина за секоја промена на состојбата на мирување или состојбата на движење на едно материјално тело)

ШТО ИЗУЧУВА СТАТИКАТА ?



сили, сили од сопствена тежина, сили кои дејствуваат помеѓу две тела, внатрешни сили во елементите потребни за системот да биде во рамнотежа...

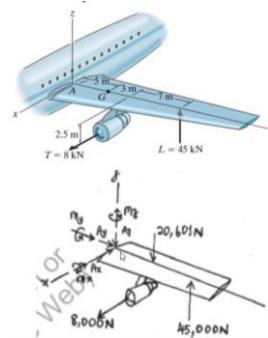
КОИ ОДГОВОРИ МОЖЕ ДА ГИ ДАДЕ СТАТИКАТА ?



Чамецот под дејство на ветерот има тенденција да се оддалечи од обалата во правец на неговата надолжна оска (агол од 80°). Ако во јагето AB има сила од 100 N, колкава е силата во јагето BC ?

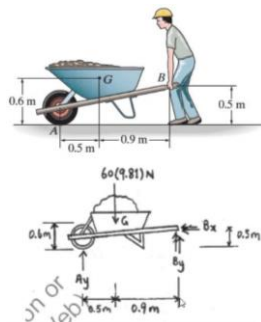
КОИ ОДГОВОРИ МОЖЕ ДА ГИ ДАДЕ СТАТИКАТА ?

Колкави се силите на спојот од авионското крило со трупот од авионот и дали тие сили може да ги издржи конструкцијата?

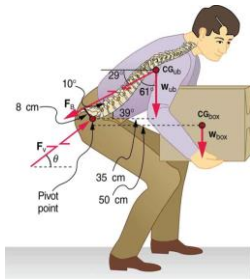


КОИ ОДГОВОРИ МОЖЕ ДА ГИ ДАДЕ СТАТИКАТА ?

Колкави се силите кои дејствуваат на човекот при работа со полна количка?

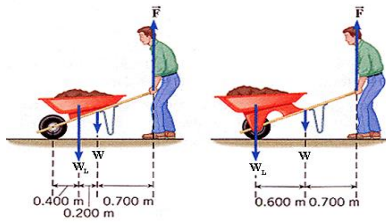


КОИ ОДГОВОРИ МОЖЕ ДА ГИ ДАДЕ СТАТИКАТА ?



Колкави се силите кои дејствуваат на човекот при подигнување на товар?

КОИ ОДГОВОРИ МОЖЕ ДА ГИ ДАДЕ СТАТИКАТА ?

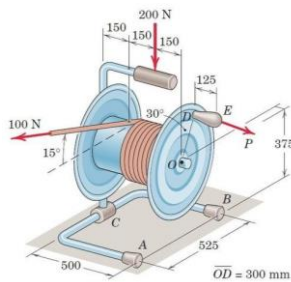


Која конструктивна изведба на количка е поповолна за работникот?

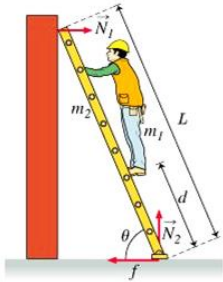
КАДЕ МОЖЕ ДА ЈА УПОТРЕБИМЕ СТАТИКАТА ?

Која е минималната сила P што треба да се обезбеди за да може да се намота кабелот?

Колкави се силите во точките А, В и С ?

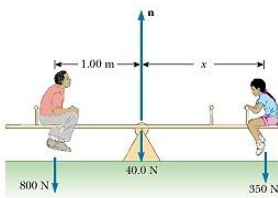


КАДЕ МОЖЕ ДА ЈА УПОТРЕБИМЕ СТАТИКАТА ?



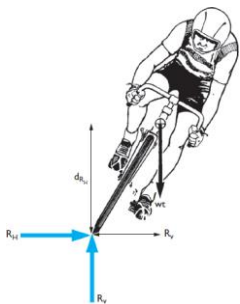
Кои услови треба да се исполнат за скалата да не се лизне ?

КАДЕ МОЖЕ ДА ЈА УПОТРЕБИМЕ СТАТИКАТА ?



На кое растојание треба да се наоѓа девојчето за да биде во рамнотежа клацкалицата?

КАДЕ МОЖЕ ДА ЈА УПОТРЕБИМЕ СТАТИКАТА ?



Колкави сили се појавуваат помеѓу тркалото и патот при возење на велосипед во кривина?



Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Машински факултет

МЕХАНИКА 1

2. СИЛА, СЛОЖУВАЊЕ НА СИЛИ

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски
Кабинет: 207
Приемни термини:



МЕХАНИКА 1
Проф. д-р Виктор Гаврилоски



Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Машински факултет

МЕХАНИКА 1

2.а. ПОИМ ЗА СИЛА

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски



МЕХАНИКА 1
Проф. д-р Виктор Гаврилоски

ДЕФИНИЦИЈА ЗА СИЛА

Сила е количинска мерка за механичкото заемно дејство меѓу материјалните тела. (Причина за секоја промена на состојбата на мирување или состојбата на движење на едно материјално тело)

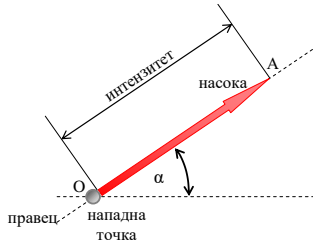
Силата е векторска големина



МЕХАНИКА 1
Проф. д-р Виктор Гаврилоски

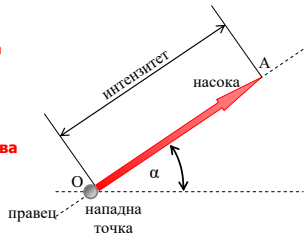
• **Скаларни големини.** Големини определени само со бројна вредност.

• **Векторски големини.**
Големини кои се определени со нападна точка, правец, насока и интензитет.

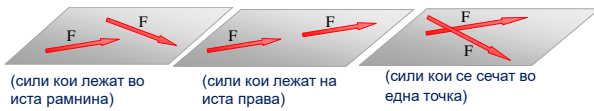


• **Силата е векторска големина**

• **Силата е вектор врзан за права**



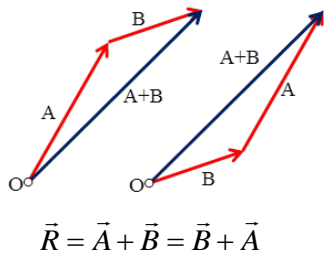
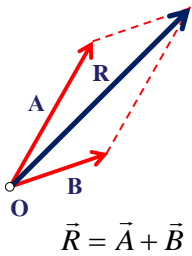
• **Положба на силите во рамнина**



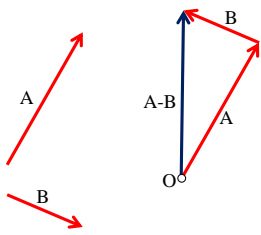
СОБИРАЊЕ НА ВЕКТОРИ

Паралелограм

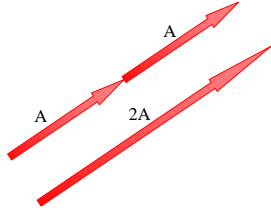
Полигон



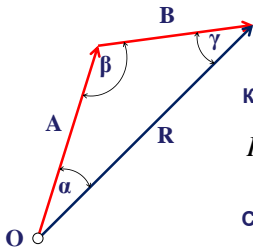
ОДЗЕМАЊЕ НА ВЕКТОРИ



МНОЖЕЊЕ НА ВЕКТОР СО СКАЛАР



КОРИСНИ ТРИГОНОМЕТРИСКИ РЕЛАЦИИ



КОСИНУСНА ТЕОРЕМА

$$R^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos \beta$$

СИНУСНА ТЕОРЕМА

$$\frac{A}{\sin \gamma} = \frac{B}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \beta}$$



Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Машински факултет

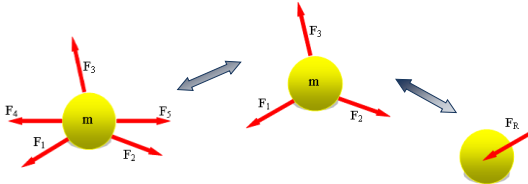
МЕХАНИКА 1

2. 6. ПРИНЦИПИ НА СТАТИКАТА

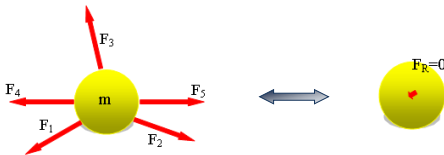
наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски

ОСНОВНИ ЗАДАЧИ НА СТАТИКАТА

- Сложување на сили и сведување на даден систем на сили на поедноставен облик

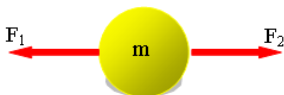


- Определување на условите за рамнотежа на даден систем од сили што дејствуваат на слободно круто тело



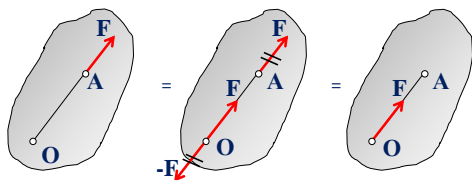
АКСИОМИ НА СТАТИКАТА

Прва аксиома: Слободно круто тело се наоѓа во положба на мирување под дејство на две сили само ако тие две сили се еднакви по интензитет ($F_1=F_2$), лежат на иста нападна линија и се со спротивна насока. Резултантата од двете сили е нула ($F_R=0$).



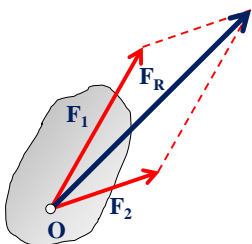
За рамнотежа $F_1=F_2$ и $F_R=0$

Втора аксиома: Дејството на даден систем од сили, на круто тело, не се менува ако на дадениот систем на сили се додаде или одземе урамнотежен систем од сили.

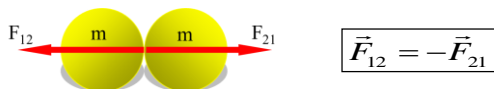


Силата може да се помести по правецот на нејзиното дејствување (вектор врзан за права)

Трета аксиома: Резултантата од две сили F_1 и F_2 , кои дејствуваат на круто тело во една точка, е определена со интензитет, правец и насока, преку дијагоналата на паралелограмот конструиран над силите како страни.



Четврта аксиома: Силите со кои дејствуваат две материјални тела, едно на друго, се еднакви по интензитет и правец, а спротивни по насока.



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Петта аксиома: Ако деформабилно тело, под дејство на даден систем од сили, се наоѓа во рамнотежа, рамнотежата ќе се одржи и тогаш ако телото стане апсолутно круто.



Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Машински факултет

МЕХАНИКА 1

3. СЛОЖУВАЊЕ НА СИЛИ

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски



МЕХАНИКА 1
Проф. д-р Виктор Гаврилоски



Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Машински факултет

МЕХАНИКА 1

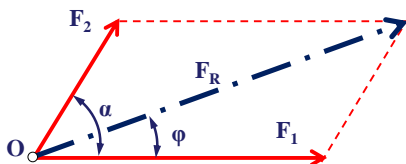
3. СЛОЖУВАЊЕ НА СИЛИ КОИ ДЕЈСТВУВААТ ВО ЕДНА ТОЧКА ВО РАМНИНА

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски



МЕХАНИКА 1
Проф. д-р Виктор Гаврилоски

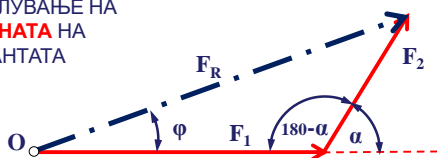
3.1. СЛОЖУВАЊЕ НА ДВЕ СИЛИ КОИ ДЕЈСТВУВААТ ВО ЕДНА ТОЧКА ВО РАМНИНА СО ПАРАЛЕЛОГРАМ НА СИЛИ





МЕХАНИКА 1
Проф. д-р Виктор Гаврилоски

ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА
ГОЛЕМИНАТА НА
РЕЗУЛТАНТАТА

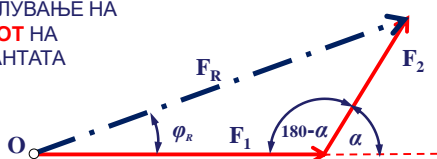


$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos(180 - \alpha)}$$

$$\cos(180 - \alpha) = -\cos \alpha \quad \longrightarrow$$

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha}$$

ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА
ПРАВЕЦОТ НА
РЕЗУЛТАНТАТА

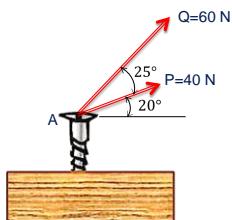


$$\frac{\sin \varphi_R}{F_2} = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{F_R}$$

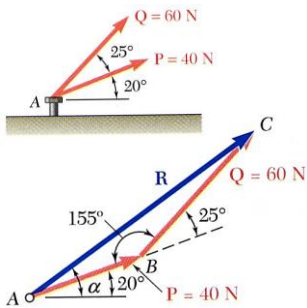
$$\sin(180 - \alpha) = \sin \alpha \quad \longrightarrow \quad \sin \varphi_R = \frac{F_2}{F_R} \sin \alpha$$

$$\varphi_R = \arcsin\left(\frac{F_2}{F_R} \sin \alpha\right)$$

ПРИМЕР: Да се определи резултантата од силите кои дејствуваат на завртката



ПРИМЕР: Да се определи резултантата од силите кои дејствуваат на завртката



$$F_R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B = 40^2 + 60^2 - 2 \cdot 40 \cdot 60 \cdot \cos 155^\circ$$

$$F_R = 97,73 \text{ N}$$

$$\frac{\sin(\alpha - 20^\circ)}{Q} = \frac{\sin 155^\circ}{R} \Rightarrow$$

$$\sin(\alpha - 20^\circ) = \sin 155^\circ \cdot \frac{Q}{R}$$

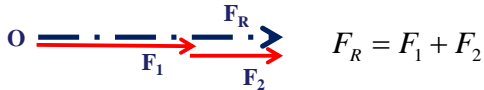
$$(\alpha - 20^\circ) = 15,04^\circ$$

$$\alpha = 20^\circ + 15,04^\circ$$

$$\alpha = 35,04^\circ$$

3.2. ПОСЕБНИ СЛУЧАИ НА СЛОЖУВАЊЕ НА ДВЕ СИЛИ

а) $\alpha = 0^\circ$



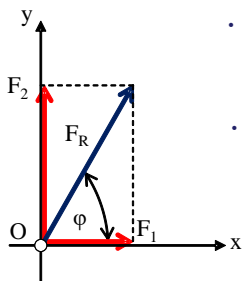
$$F_R = F_1 + F_2$$

б) $\alpha = \pi = 180^\circ$



$$F_R = F_1 - F_2$$

в) $\alpha = \pi/2 = 90^\circ$



• Интензитет на резултантата

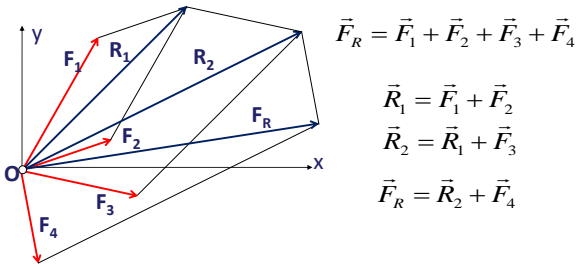
$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

• Правец на резултантата

$$\tan \varphi = \frac{F_2}{F_1}$$

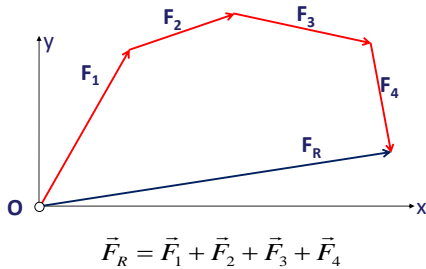
$$\varphi = \arctan\left(\frac{F_2}{F_1}\right)$$

3.3. СЛОЖУВАЊЕ НА ПОВЕЌЕ СИЛИ СО ПАРАЛЕЛОГРАМ НА СИЛИ

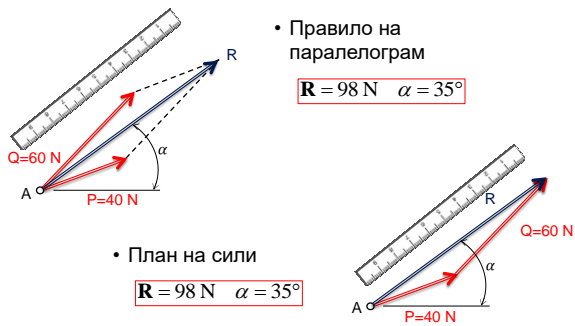


3.4. СЛОЖУВАЊЕ НА ПОВЕЌЕ СИЛИ СО ПОЛИГОН (ПЛАН) НА СИЛИ – ГРАФИЧКИ МЕТОД

• Графичко сложување на систем од сили

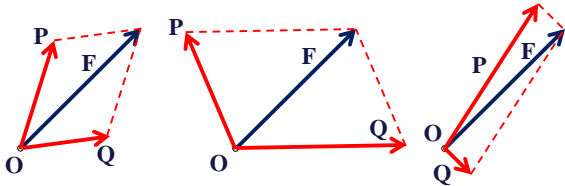


ПРИМЕР: Да се определи резултантата од силите кои дејствуваат на завртката со графички метод



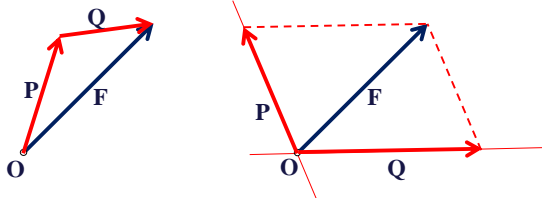
3.5. РАЗЛОЖУВАЊЕ НА СИЛА ВО РАМНИНА

Сила која дејствуваат во една материјална точка може да се замени со две или повеќе сили кои заедно имаат ист ефект на точката.

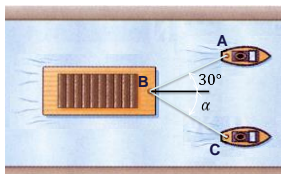


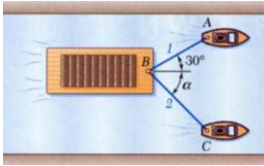
• позната е една од двете компоненти

• познати се правците на секоја од компонентите

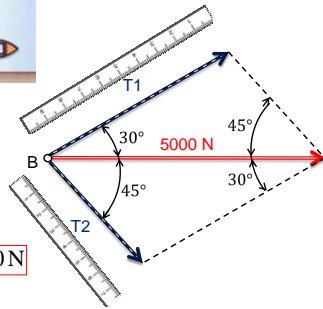


ПРИМЕР: Товар е влечен од два брода. Резултантата од двете сили е во правец на оската на товарот и изнесува 5000 N. Да се определи затегнувањето во секое од јажињата ако $\alpha = 45^\circ$

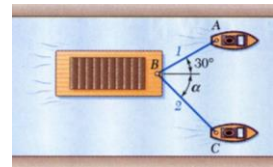




ГРАФИЧКО РЕШЕНИЕ



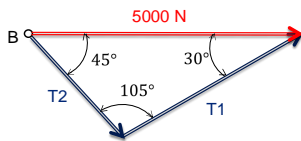
$T_1 = 3700 \text{ N} \quad T_2 = 2600 \text{ N}$



АНАЛИТИЧКО РЕШЕНИЕ

$$\frac{\sin 45^\circ}{T_1} = \frac{\sin 30^\circ}{T_2} = \frac{\sin 105^\circ}{5000}$$

$T_1 = 3660 \text{ N} \quad T_2 = 2590 \text{ N}$



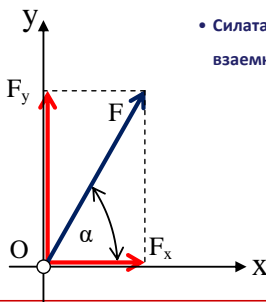


МЕХАНИКА 1

3. СЛОЖУВАЊЕ НА СИЛИ КОИ ДЕЈСТВУВААТ ВО ЕДНА ТОЧКА ВО РАМНИНА

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски

3.5. СЛОЖУВАЊЕ НА СИЛИ ШТО ДЕЈСТВУВААТ ВО ЕДНА ТОЧКА СО МЕТОД НА ПРОЕКЦИИ НА СИЛИ



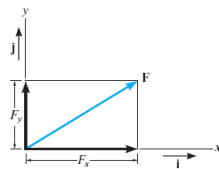
- Силата може да се проектира на две взаемно нормални компоненти

$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

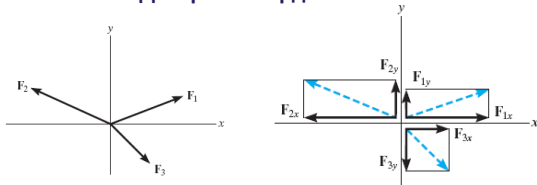
Векторско прикажување на силата во Декартов координатен систем

$$F = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$



- Единечните вектори (ортови) \vec{i} и \vec{j} се употребуваат за да ги означат правците и на x и y компонентите од векторот
- Единечните вектори (ортови) \vec{i} и \vec{j} имаат бездимензионална вредност со големина ($= 1$)
- Ортовите се секогаш насочени кон позитивната вредност и се придружувани со скаларите F_x и F_y

Собирање на сили преку векторско прикажување на силата во Декартов координатен систем



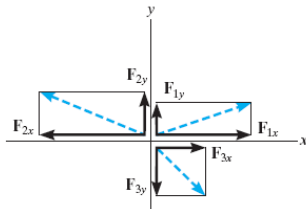
$$F_1 = F_{1x} \vec{i} + F_{1y} \vec{j}$$

$$F_2 = -F_{2x} \vec{i} + F_{2y} \vec{j}$$

$$F_3 = F_{3x} \vec{i} - F_{3y} \vec{j}$$

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$= (F_{Rx}) \vec{i} + (F_{Ry}) \vec{j}$$



$$F_{Rx} = F_{1x} - F_{2x} + F_{3x}$$

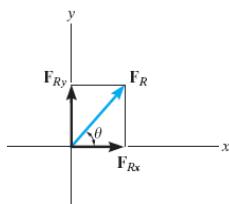
$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}$$

- За било кои случај може да се запише:

$$F_{Rx} = \sum F_x$$

$$F_{Ry} = \sum F_y$$

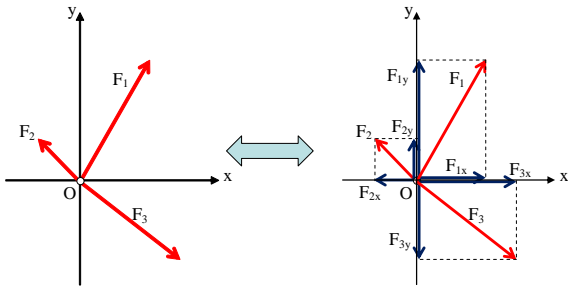
* Внимавајте на знаците од компонентите на силите

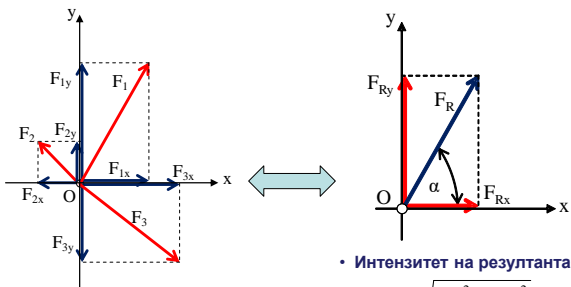


- Интензитетот на F_R може да се најде преку Питагоровата теорема, а правецот преку тригонометриска функција

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} \text{ and } \theta = \tan^{-1} \left| \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right|$$

Решавањето на проблемот на собирање на вектори со метод на разложување се состои во:





$$F_{Rx} = \sum F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

$$F_{Ry} = \sum F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

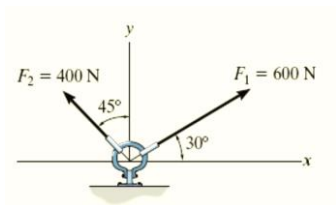
• Интензитет на резултанта

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

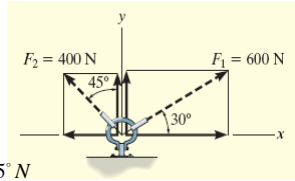
• Правец на резултанта

$$\tan \alpha = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}$$

ПРИМЕР: Да се определи интензитетот, правецот и насоката на резултантата од силите F_1 и F_2 кои дејствуваат на завртката



Изражување преку скаларните вредности



$$F_{Rx} = \Sigma F_x :$$

$$F_{Rx} = 600 \cos 30^\circ N - 400 \sin 45^\circ N$$

$$= 236.8 N \rightarrow$$

$$F_{Ry} = \Sigma F_y :$$

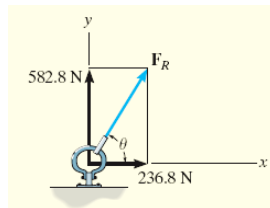
$$F_{Ry} = 600 \sin 30^\circ N + 400 \cos 45^\circ N$$

$$= 582.8 N \uparrow$$

Резултантната сила изнесува

$$F_R = \sqrt{(236.8 N)^2 + (582.8 N)^2}$$

$$= 629 N$$



Праецот е определен со
аголот θ :

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{582.8 N}{236.8 N} \right) = 67.9^\circ$$

Векторски начин на изражување

$$\mathbf{F}_1 = \{ 600 \cos 30^\circ \mathbf{i} + 600 \sin 30^\circ \mathbf{j} \} N$$

$$\mathbf{F}_2 = \{ -400 \sin 45^\circ \mathbf{i} + 400 \cos 45^\circ \mathbf{j} \} N$$

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

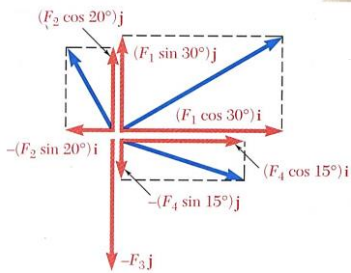
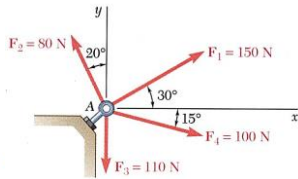
$$= (600 \cos 30^\circ N - 400 \sin 45^\circ N) \mathbf{i}$$

$$+ (600 \sin 30^\circ N + 400 \cos 45^\circ N) \mathbf{j}$$

$$= \{ 236.8 \mathbf{i} + 582.8 \mathbf{j} \} N$$

Интензитетот и праецот на \mathbf{F}_R се определуваат на ист
начин како претходно.

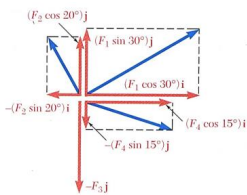
ПРИМЕР: Да се определи резултантата од силите кои дејствуваат на завртката



$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}$$

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy}$$

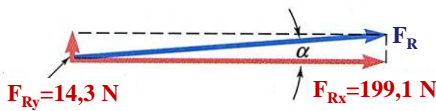


$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 199,1 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 14,3 \text{ N}$$

сила	ГОЛЕМИНА	x – КОМПОНЕНТА	y – КОМПОНЕНТА
\vec{F}_1	150 N	+129,9 N	+75,0 N
\vec{F}_2	80 N	-27,4 N	+75,2 N
\vec{F}_3	110 N	0 N	-110,0 N
\vec{F}_4	100 N	+96,6 N	-25,9 N
		$F_{Rx} = 199,1 \text{ N}$	$F_{Ry} = 14,3 \text{ N}$



$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{199,1^2 + 14,3^2} \quad \boxed{F_R = 199,6 \text{ N}}$$

$$\tan \alpha = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \frac{14,3}{199,1} \quad \boxed{\alpha = 4,1^\circ}$$

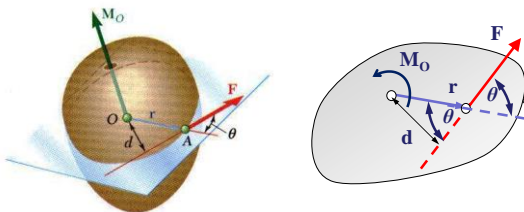


МЕХАНИКА 1

4. СТАТИЧКИ МОМЕНТ И СПРЕГ НА СИЛИ

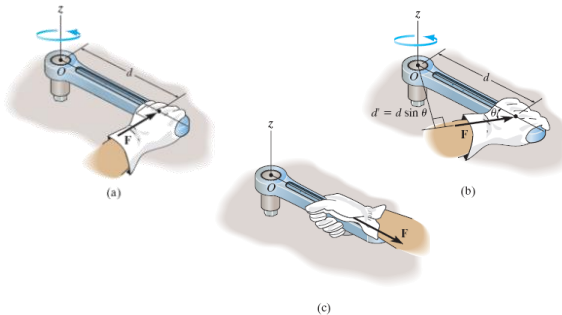
наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски

4.1. ПОИМ ЗА СТАТИЧКИ МОМЕНТ



- Статички момент е дејство што го врши силата врз тело околу неподвижната точка или оската. Истиот ја покажува намерата на силата да предизвика ротација на тело околу точката, односно оската.

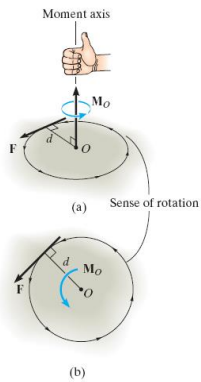
- Статичкиот момент е вектор кој зависи од правецот, интензитетот и насоката на силата F , како и од и положбата во однос на точката O .



- Интензитетот на статичкиот момент во рамнина е:

$$M_O = F \cdot d$$

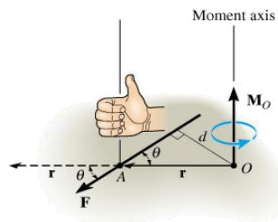
- Правецот на статички момент е нормален на рамнината во која се наоѓаат O и силата F .
- Насоката на статичкиот момент се определува по правило на десна рака.
- Статичкиот момент е вектор врзан за точка, бидејќи за различен избор на моментна точка се добиваат различни вредности за статичкиот момент



Во векторски облик статичкиот момент може да се претстави како:

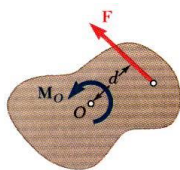
$$M_O = \vec{r} \times \vec{F} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$$M_O = r \cdot F \cdot \sin\theta = F \cdot d \quad [\text{Nm}]$$

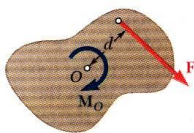


Статичкиот момент има вредност нула ако:

- силата е нула ($F=0$)
- нормалното растојание е нула ($d=0$) односно нападната линија на силата минува низ моментната точка



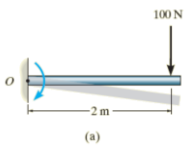
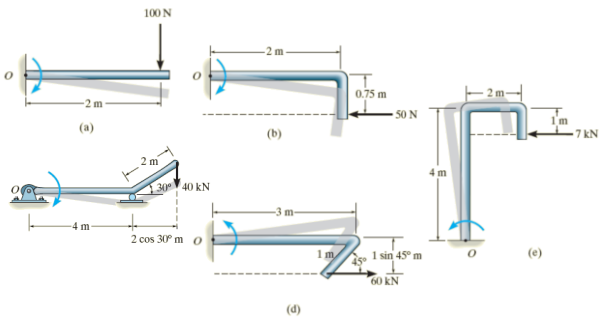
(a) $M_O = +Fd$



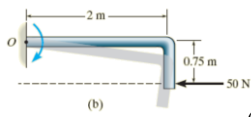
(b) $M_O = -Fd$

- Доколку силата се стреми да ја заврти структурата обратно од правецот на движење на стрелките на часовникот, договорено е статичкиот момент да се земе со позитивен предзнак.
- Доколку силата се стреми да ја заврти структурата во правец на движење на стрелките на часовникот, договорено е статичкиот момент да се земе со негативен предзнак.

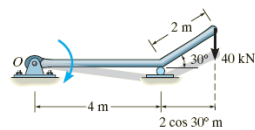
ПРИМЕР: Да се определи интензитетот и насоката на статичкиот момент од силата F во однос на точката O



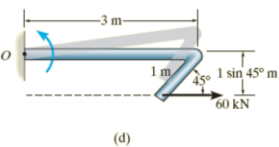
$$(a) M_o = (100N)(2m) = 200Nm$$



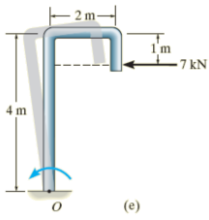
$$(b) M_o = (50N)(0,75m) = 37,5 Nm$$



$$(c) M_o = (40N)(4m + 2 \cos 30^\circ m) = 229Nm$$



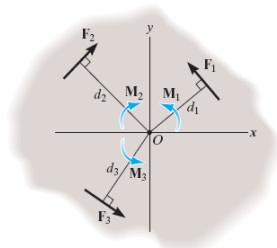
$$(d) M_o = (60N)(1 \sin 45^\circ m) = 42,4Nm$$



(e) $M_o = (7kN)(4m - 1m) = 21,0 kNm$

4.2. РЕЗУЛТАНТЕН МОМЕНТ ОД ПОВЕЌЕ СИЛИ - ВАРИЊОНОВА ТЕОРЕМА

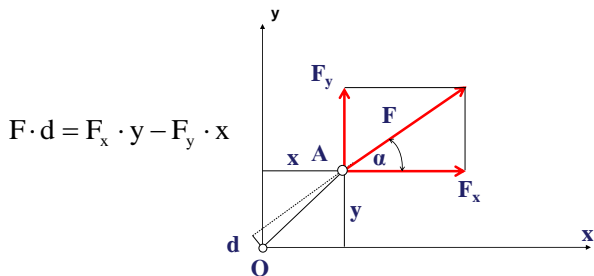
Моментот околу дадена точка O од резултантата од неколку сили е еднаков на сумата од пооделните моменти од силите околу истата точка O.



$$M_{Ro} = M_1 + M_2 + M_3 + \dots + M_n$$

$$F \cdot d = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 + F_3 \cdot d_3 \dots$$

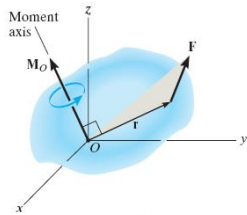
Применувајќи ја Вариџоновата теорема директното определување на моментот од силата F може да се замени со определување на моменти од двете компоненти на силата F.



ВЕКТОРСКО ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА МОМЕНТОТ ОД СИЛА ВО ПРОСТОР

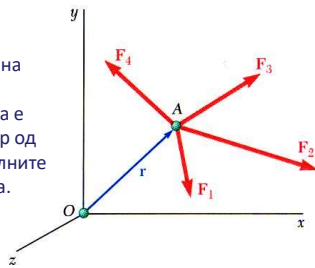
Статичкиот момент од произволна сила во простор во векторски облик може да се запише:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$



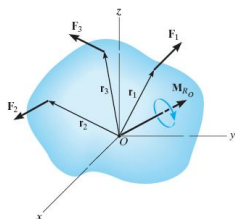
ВЕКТОРСКО ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ВАРИЊОНОВАТА ТЕОРЕМА

Статичкиот момент на резултантата од еден систем на сили кои дејствуваат во една точка, во однос на друга точка е еднаков на алгебарскиот збир од статичките моменти на одделните сили во однос на истата точка.



$$\vec{M}_{Ro} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots$$

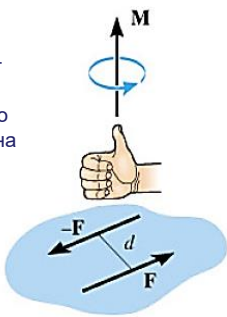
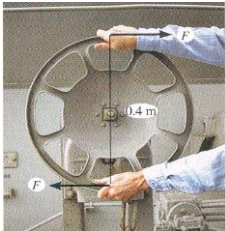
Статичкиот момент на резултантата од еден систем на сили кои дејствуваат во повеќе точки, во однос на друга точка е еднаков на алгебарскиот збир од статичките моменти на одделните сили во однос на истата точка.



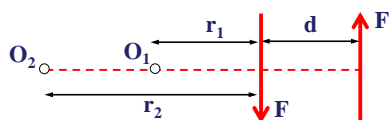
$$\vec{M}_{Ro} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 \dots$$

4.3. СПРЕГ НА СИЛИ

- Две паралелни сили F и $-F$ со ист интензитет и спротивни насоки поставени на меѓусебно нормално растојание " d ", формираат спрег на сили.



$$M = F \cdot d$$



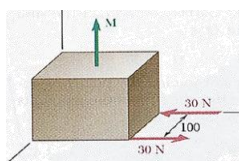
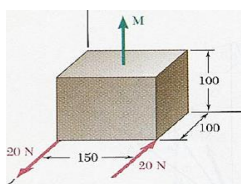
$$F_R = F - F = 0$$

$$M_{O1} = -F \cdot r_1 + F \cdot (r_1 + d) = F \cdot d$$

$$M_{O2} = -F \cdot r_2 + F \cdot (r_2 + d) = F \cdot d$$

Спрегот е слободен вектор, бидејќи неговата вредност не зависи од изборот на моментната точка

ЕКВИВАЛЕНТИ СПРЕГОВИ



Два спрега на сили ќе имаат еднаков момент доколку:

- Имаат ист интензитет $F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$
- лежат во иста или во две паралелни рамнини, и
- имаат иста насока



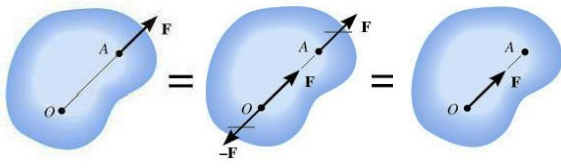
МЕХАНИКА 1

5. РЕДУКЦИЈА НА СИЛИ И СЛОЖУВАЊЕ НА ПРОИЗВОЛНИ СИЛИ ВО РАМНИНА

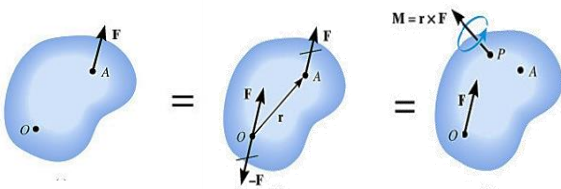
наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски

5.1. РЕДУКЦИЈА НА СИЛИ

Линиско поместување на сила

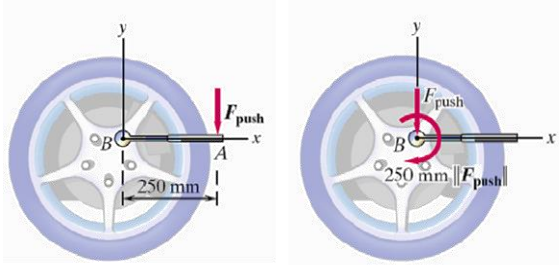


Паралелно поместување на сила

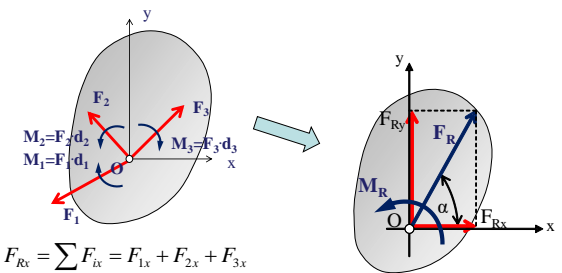
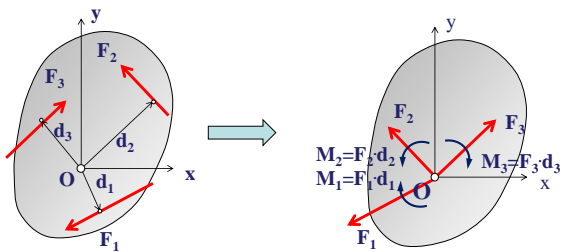


Секоја сила може да се помести паралелно на својата нападна линија, но притоа треба да се земе предвид и моментот што силата го прави во однос на точката на поместување. Моментот е векторскиот производ од радиус векторот до редукционата точка и силата, односно моментот има големина еднаква на производот од силата и нормалното растојание до редукционата точка.

Оваа постапка се вика **редукција на сила**, а обратно е **сложување на сила и момент** (спрег на сили).



5.2. СЛОЖУВАЊЕ ПРОИЗВОЛЕН СИСТЕМ НА СИЛИ ВО РАМНИНА



$$F_{Rx} = \sum F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x}$$

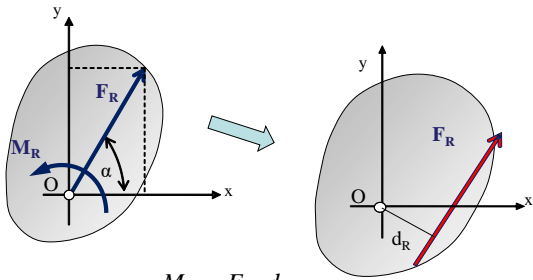
$$F_{Ry} = \sum F_{iy} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}$$

$$M_R = \sum M_i = M_1 + M_2 + M_3$$

$$M_R = \sum F_i \cdot d_i = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 + F_3 \cdot d_3$$



$$M_R = F_R \cdot d_R$$

$$d_R = \frac{M_R}{F_R}$$

ПРИМЕР:



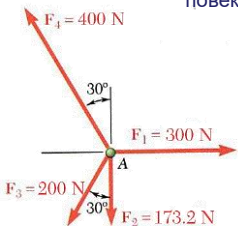
МЕХАНИКА 1

6. РАМНОТЕЖА

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски

6.1. РАМНОТЕЖА НА СИСТЕМ СИЛИ КОИ ДЕЈСТВУВААТ ВО ЕДНА ТОЧКА ВО РАМНИНА

Материјална точка на која дејствуваат
повеќе сили се наоѓа во рамнотежа ако:



$$\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i = 0 \quad \begin{aligned} F_{Rx} &= \sum F_{ix} = 0 \\ F_{Ry} &= \sum F_{iy} = 0 \end{aligned}$$

Аналитичките услови за
рамнотежа се пишуваат:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0 \end{aligned}$$

6.2. РАМНОТЕЖА НА ПРОИЗВОЛЕН СИСТЕМ СИЛИ ВО РАМНИНА

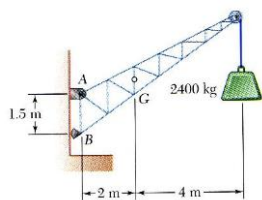
- Круто тело е во статичка рамнотежа кога надворешните сили и моменти не доведуваат до translација и/или ротација на телото.
- Потребни и доволни услови за статичка рамнотежа на круто тело се резултантната сила и резултантниот момент да имаа вредност еднаква на нула.

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum \vec{M}_O = 0$$

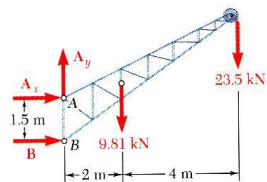
- Аналитичките услови за рамнотежа на произволен систем од сили во рамнина, се пишуваат:

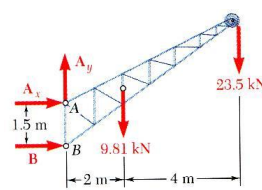
$$\begin{aligned} \sum X &= 0 \\ \sum Y &= 0 \\ \sum M_O &= 0 \end{aligned}$$

6.3. РАМНОТЕЖА НА НЕСЛОБОДНИ ТЕЛА И СИСТЕМ ОД ТЕЛА

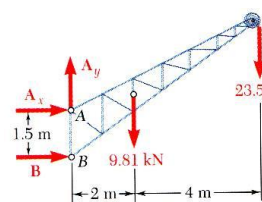


Прв чекор во анализа на статичка рамнотежа на круто тело е идентификација на сите сили кои дејствуваат на телото и цртање на **дијаграм на сили на слободно тело**.





1. Крутото тело се отстранува од врските со надворешноста и врските со останатите тела.
2. Се нанесуваат надворешните сили со својата нападна точка, правец и големина.
3. Се нанаесуваат непознатите сили-реакциите со нивната нападна точка, правец и претпоставена насока.
4. Се нанесуваат сите димензии потребни при пресметување.



5. Се применуваат условите за рамнотежа.

$$\sum X = 0$$

$$A_x + B = 0$$

$$\sum Y = 0$$

$$A_y - 9,81 - 23,5 = 0$$

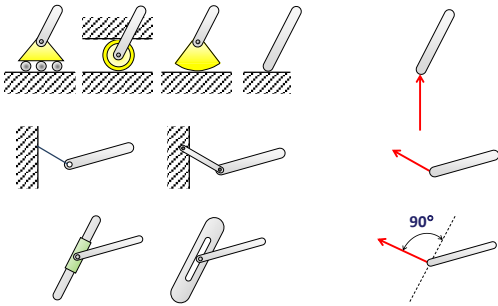
$$\sum M_A = 0$$

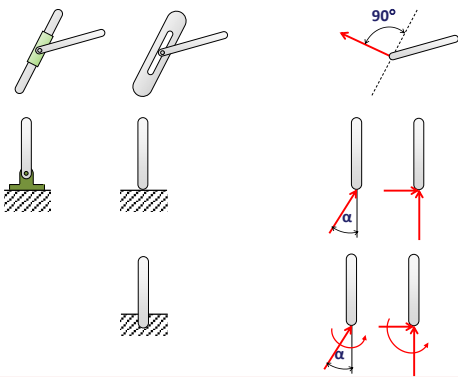
$$B \cdot 1,5 - 9,81 \cdot 2 - 23,5 \cdot 6 = 0$$

6. Се решава системот со равенки и се определуваат непознатите големини

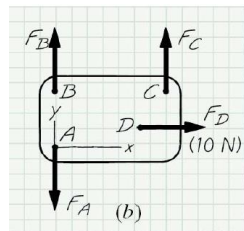
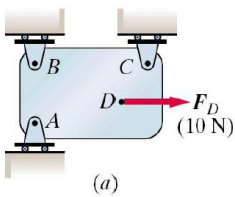
$$B = 107,08 \text{ kN} \quad A_x = -107,08 \text{ kN} \quad A_y = 33,31 \text{ kN}$$

РЕАКЦИИ ОД ВРСКИ КАЈ РАМНИНСКИ СИСТЕМИ





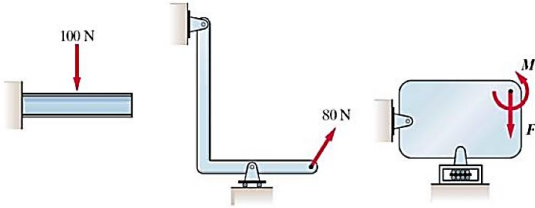
Пример: Да се нацрта дијаграмот на сили за слободно тело за системот прикажан на сликата



6.4. СТАТИЧКИ ОПРЕДЕЛЕНИ И НЕОПРЕДЕЛЕНИ СИСТЕМИ

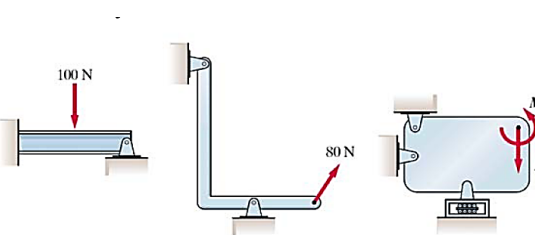
Статички определени системи се системите каде што непознатите кои произлегуваат од врските одговара на бројот на услови за рамнотежа.

Статички определени системи



Доколку бројот на непознатите е поголем од условите за рамнотежа, велиме дека системите се статички неопределени.

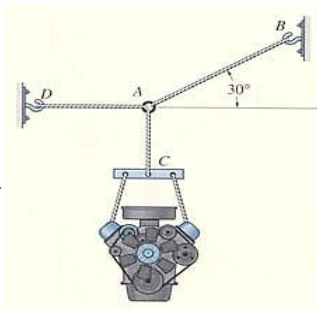
Статички неопределени системи



ПРИМЕРИ

Пример 1:

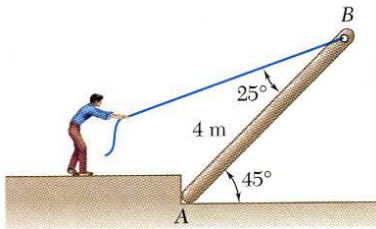
Да се определат силите во јажињата ако моторот има маса 250 kg



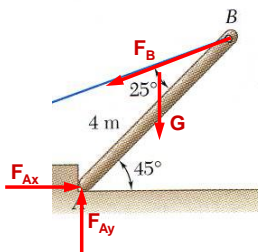
Решение 1:

Пример 2:

Да се определат реакциите во точката A и силата во
јажето AB, ако гредата има маса од 10 kg.

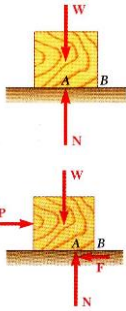


Решение 2:



$$\begin{aligned} \sum M_A &= 0 \\ F_B \cdot \sin 25^\circ \cdot 4 - G \cdot 2 \cdot \cos 45^\circ &= 0 \\ F_B &= 81,9 \text{ N} \\ \sum X &= 0 \\ F_{Ax} - F_B \cdot \cos 20^\circ &= 0 \\ F_{Ax} &= 76,96 \text{ N} \\ \sum Y &= 0 \\ F_{Ay} - F_B \cdot \sin 20^\circ - G &= 0 \\ F_{Ay} &= 126,11 \text{ N} \\ F_A &= \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} = 147,74 \text{ N} \end{aligned}$$

6.5. РАМНОТЕЖА ПРИ ДЕЈСТВО НА СИЛИ ОД ТРИЕЊЕ ПРИ ЛИЗГАЊЕ

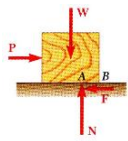


Реакцијата од подлогата на тело со тежина W е силата N , при што од условите за рамнотежа произлегува $W=N$.

Ако телото се наоѓа на идеализирана подлога без триење, при дејство на сила P телото би требало да се движи бидејќи нема реакција која ја урамнотежува силата P .

Во реалноста помеѓу површините постои триење, како резултат на што се појавува сила F која се спротиставува на надворешната сила P и телото го држи во рамнотежа.

Силата што се појавува како резултат на триењето се нарекува сила од триење при лизгање и лежи во рамнината на подлогата.



Силата на триење е пропорционална на нормалната реакција N и коефициентот на триење μ .

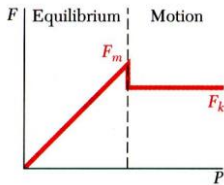
Со пораст на силата P расте и силата F (статичка сила на триење) со што се одржува рамнотежата.

Максимална вредност силата F ќе достигне пред телото да почне да се движи и изнесува:

$$F_m = \mu_s N$$

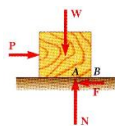
При движење на телото ќе се појави кинетичка сила на триење која изнесува:

$$F_k = \mu_k N$$



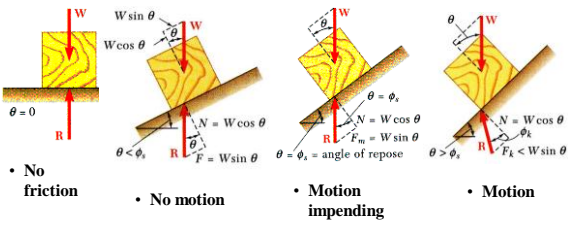
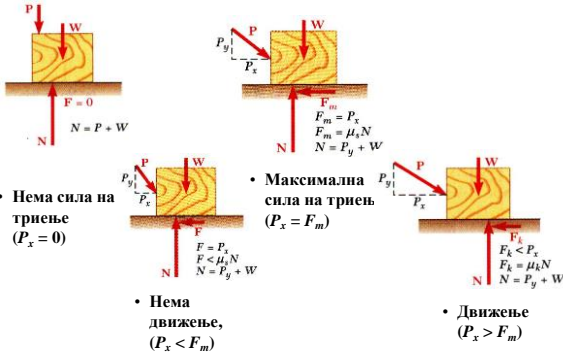
Ориентациони вредности на статичкиот коефициент на триење:

Metal on metal	0.15–0.60
Metal on wood	0.20–0.60
Metal on stone	0.30–0.70
Metal on leather	0.30–0.60
Wood on wood	0.25–0.50
Wood on leather	0.25–0.50
Stone on stone	0.40–0.70
Earth on earth	0.20–1.00
Rubber on concrete	0.60–0.90



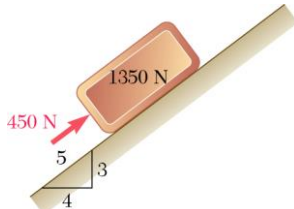
Силата на триење е :

- пропорционална на нормалната реакција
- зависна од видот и состојбата на контактните површини
- независна од големината на контактната површина



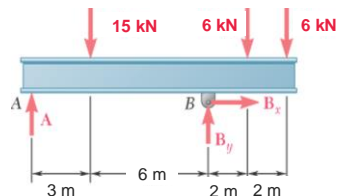
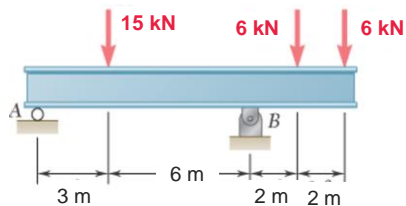
Пример 3:

Сила од 450 N делува на товар со тежина 1350 N кој е поставен на наклонета рамнина. Коэффициентот на триење помеѓу товарот и рамнината е $\mu_s = 0,25$ и $\mu_k = 0,20$. Да се определи дали товарот е во рамнотежа, како и вредноста на силата на триење при зададените услови.



Пример 5:

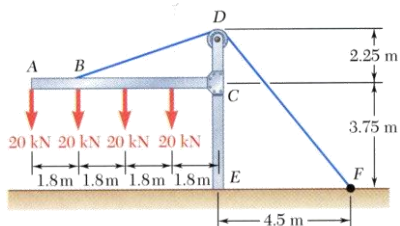
Да се определи реакциите во лежиштата.



$$\begin{aligned}\sum X &= 0 \\ B_x &= 0 \\ \sum M_A &= 0 \\ -15 \cdot 3 + 9 \cdot B_y - 6 \cdot 11 - 6 \cdot 13 &= 0 \\ B_y &= 21,0 \text{ kN} \\ \sum M_B &= 0 \\ -9 \cdot A + 15 \cdot 6 - 6 \cdot 2 - 6 \cdot 4 &= 0 \\ A &= 6,0 \text{ kN}\end{aligned}$$

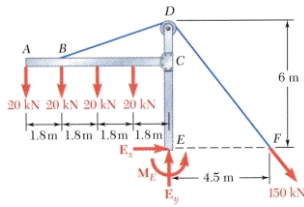
Пример 6:

Рамката носи дел од покрив на мала зграда. Силата на затегнување во кабелот изнесува 150 kN. Да се определи реакцијата во точката E.



Решение 6:

• Дијаграм на слободно тело



• За да се определат компонентите на реакцијата и моментот во точката E се решаваат 3 равенки за рамнотежа.

$$\sum F_x = 0: E_x + \frac{4,5}{7,5} \cdot 150 = 0$$

$$E_x = -90 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: E_y - 4 \cdot 20 - \frac{6}{7,5} \cdot 150 = 0$$

$$E_y = +200 \text{ kN}$$

$$\sum M_E = 0:$$

$$+20 \cdot 7,2 + 20 \cdot 5,4 + 20 \cdot 3,6 + 20 \cdot 1,8 - \frac{6}{7,5} \cdot 150 \cdot 4,5 + M_E = 0$$

$$M_E = 180 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

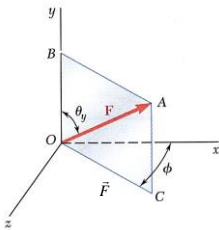


МЕХАНИКА 1

7. СТАТИКА ВО ПРОСТОР

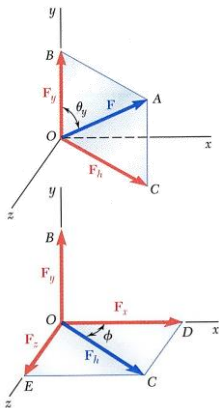
наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски

7.1. КОМПОНЕНТИ НА СИЛА ВО ПРОСТОР



Ако нападната точка на силата во простор се поклопува со координатниот почеток, правецот на силата може да биде определен со аглиите што ги заклопува со две оски.

Нека силата како вектор лежи во рамнината ОВАС. Тогаш таа има дефиниран правец со аголот во однос на у оската и аголот што рамнината го заклопува со една од оските



Компонентите на силата во вертикална и хоризонтална рамнина ќе бидат:

$$F_y = F \cos \theta_y$$

$$F_h = F \sin \theta_y$$

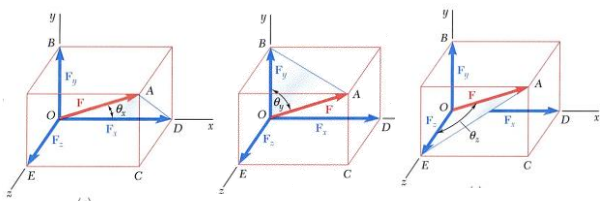
Ако хоризонталната компонента се разложи по соодветните оски, тогаш се добива:

$$F_x = F_h \cos \phi$$

$$= F \sin \theta_y \cos \phi$$

$$F_z = F_h \sin \phi$$

$$= F \sin \theta_y \sin \phi$$

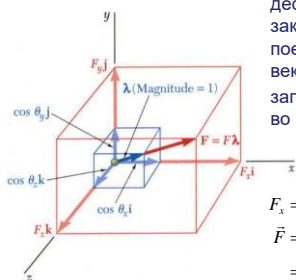


Ако правецот на силата F е дефинирана со аглиите што ги заклопува со секоја оска поединечно ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$), тогаш компонентите на силата по соодветните оски се :

$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = F (\cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k})$$

Нека правецот на силата F е дефинирана со аглиите што ги заклопува со секоја оска поединечно ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$). Во векторски облик силата може да се запише преку единичниот вектор $\vec{\lambda}$ во истиот правец.



$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

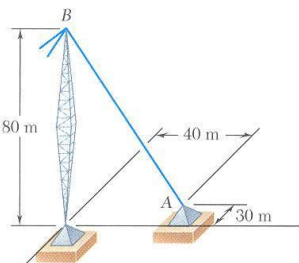
$$= F (\cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k})$$

$$= F \vec{\lambda}$$

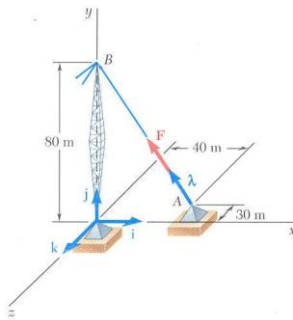
$$\vec{\lambda} = \cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k}$$

Пример 1:

Силата на затегање во јагето AB е 2500 N . Да се определат компонентите F_x, F_y, F_z на силата што дејствува во точката A и аглиите $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ што таа ги зафаќа со соодветните оски



Решение 1:



$$\vec{\lambda} = \cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k}$$

$$= -0.424 \vec{i} + 0.848 \vec{j} + 0.318 \vec{k}$$

$$\theta_x = 115.1^\circ$$

$$\theta_y = 32.0^\circ$$

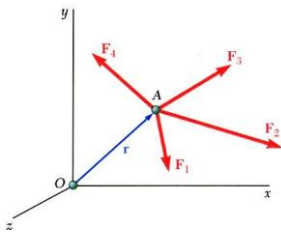
$$\theta_z = 71.5^\circ$$

$$\vec{F} = F \vec{\lambda}$$

$$= (2500 \text{ N}) (-0.424 \vec{i} + 0.848 \vec{j} + 0.318 \vec{k})$$

$$= (-1060 \text{ N}) \vec{i} + (2120 \text{ N}) \vec{j} + (795 \text{ N}) \vec{k}$$

7.2. ВАРИЊОНОВА ТЕОРЕМА ЗА СИЛИ ВО ПРОСТОР



$$\vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots$$

7.3. КОМПОНЕНТИ НА МОМЕНТ ОД СИЛА ВО ПРОСТОР

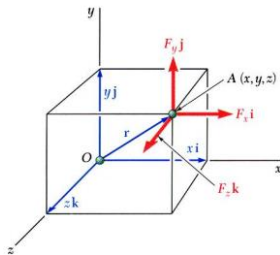
$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

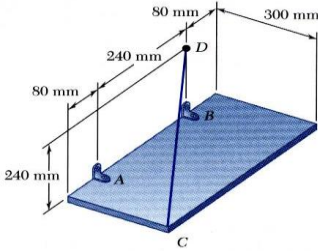
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

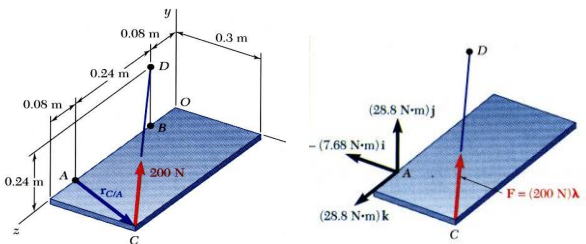
$$= (yF_z - zF_y)\vec{i} + (zF_x - xF_z)\vec{j} + (xF_y - yF_x)\vec{k}$$



Пример 2:

Правоаголна плоча е прицврстена во точките A и B и се држи со помош на јаже CD. Ако силата на затегање во јажето CD е 200 N да се определат моментите што таа сила ги предизвикува во точката A.





$$\vec{F} = -(120 \text{ N})\vec{i} + (96 \text{ N})\vec{j} - (128 \text{ N})\vec{k}$$

$$\vec{M}_A = -(7.68 \text{ N}\cdot\text{m})\vec{i} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\vec{j} + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})\vec{k}$$

7.4. РАМНОТЕЖА НА ПРОИЗВОЛЕН СИСТЕМ СИЛИ ВО ПРОСТОР

- Круто тело е во статичка рамнотежа кога надворешните сили и моменти не доведуваат до трансляција и/или ротација на телото.
- Потребни и доволни услови за статичка рамнотежа на круто тело се резултантната сила и резултантниот момент да имаа вредност еднаква на нула.

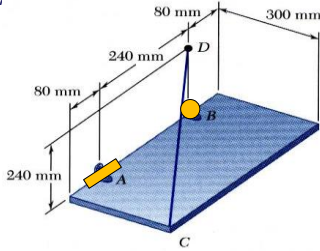
$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum \vec{M}_O = 0$$

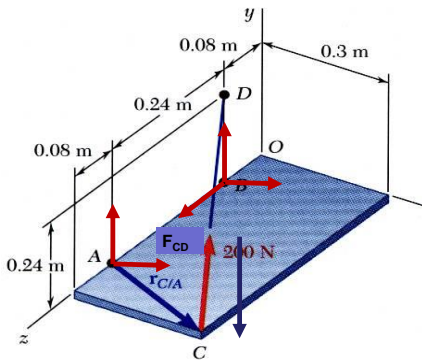
- Аналитичките услови за рамнотежа на произволен систем од сили во простор, се пишуваат:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 & \sum M_x &= 0 \\ \sum Y &= 0 & \sum M_y &= 0 \\ \sum Z &= 0 & \sum M_z &= 0 \end{aligned}$$

Пример 3:

Правоаголна плоча е прицврстена во точката A со цилиндрично лежиште и во точката B со сферно чежиште. Плочата со тежина 200 N се држи во рамнотежа со помош на јаже CD. Да се определи силата во јагето CD и реакциите во лежиштата.







Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ во Скопје
Машински факултет

МЕХАНИКА 1

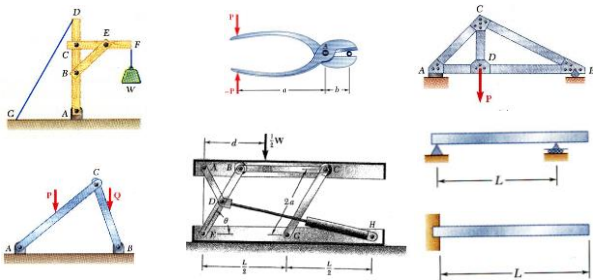
7. АНАЛИЗА НА СТРУКТУРИ

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски



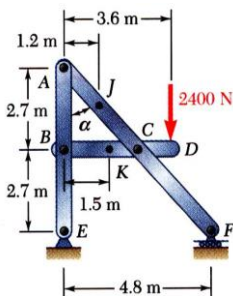
МЕХАНИКА 1
Проф. д-р Виктор Гаврилоски

7.1. ПОИМ ЗА СТРУКТУРА



МЕХАНИКА 1
Проф. д-р Виктор Гаврилоски

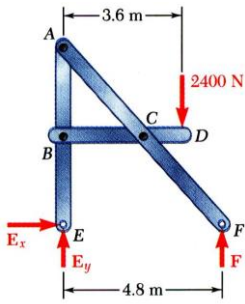
7.2. ПОИМ ЗА НАДВОРЕШНИ НАТОВАРУВАЊА, РЕАКЦИИ ОД ВРСКИ И ВНАТРЕШНИ СТАТИЧКИ ГОЛЕМИНИ



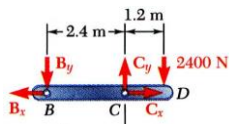
надворешни
натоварувања



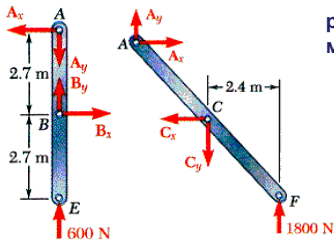
МЕХАНИКА 1
Проф. д-р Виктор Гаврилоски

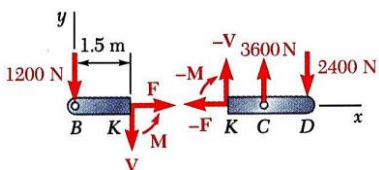


реакции од врски со надворешноста
(реакции во потпори)

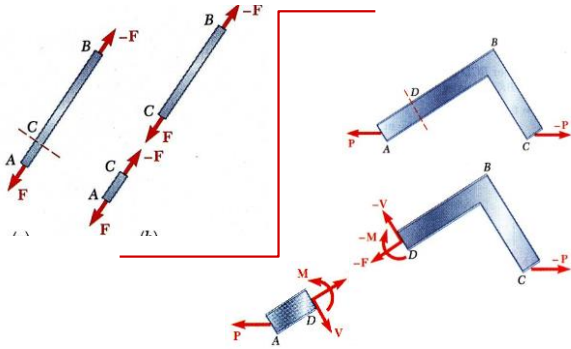


реакции од врски меѓу телата



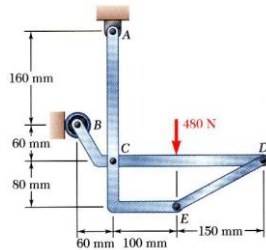


внатрешни статички големини

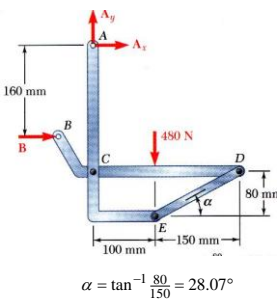


Пример 1:

Лостовите ACE и BCD се зглобно поврзани во точката C, а со лостот DE се поврзани во точките D и E. За оптоварувањето прикажано на сликата да се определи силата во лостот DE и компонентите на силите во точката C од лостот BCD.



Решение 1:



$$\sum F_y = 0$$

$$A_y - 480 = 0$$

$$A_y = 480 \text{ N } \uparrow$$

$$\sum M_A = 0$$

$$-(480 \text{ N})(100 \text{ mm}) + B(160 \text{ mm}) = 0$$

$$B = 300 \text{ N } \rightarrow$$

$$\sum F_x = 0$$

$$B + A_x = 0$$

$$A_x = -300 \text{ N } \leftarrow$$

$$\sum M_C = 0$$

$$(F_{DE} \sin \alpha)(250 \text{ mm}) + (300 \text{ N})(60 \text{ mm}) + (480 \text{ N})(100 \text{ mm}) = 0$$

$$F_{DE} = -561 \text{ N}$$

$$F_{DE} = 561 \text{ N C}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$C_x - F_{DE} \cos \alpha + 300 \text{ N} = 0$$

$$C_x - (-561 \text{ N}) \cos \alpha + 300 \text{ N} = 0$$

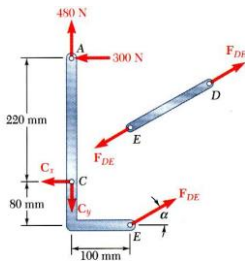
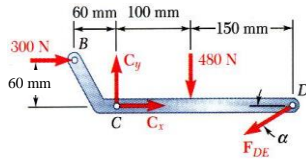
$$C_x = -795 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$C_y - F_{DE} \sin \alpha - 480 \text{ N} = 0$$

$$C_y - (-561 \text{ N}) \sin \alpha - 480 \text{ N} = 0$$

$$C_y = 216 \text{ N}$$



Проверка:

$$\sum M_A = 0$$

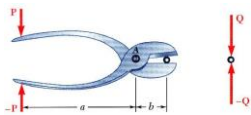
$$(F_{DE} \cos \alpha)(300 \text{ mm}) + (F_{DE} \sin \alpha)(100 \text{ mm}) - C_x(220 \text{ mm}) = 0$$

$$(-561 \cos \alpha)(300 \text{ mm}) + (-561 \sin \alpha)(100 \text{ mm}) - (-795)(220 \text{ mm}) = 0$$

$$0 = 0$$

Пример 2:

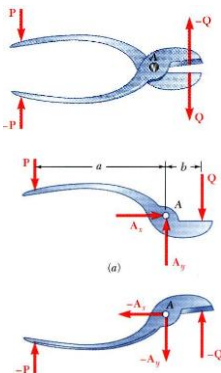
Да се определи зависноста помеѓу силите P и Q.



$$\sum M_A = 0$$

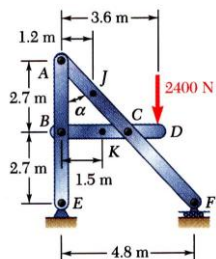
$$aP - bQ = 0$$

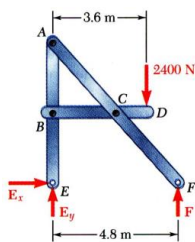
$$Q = \frac{a}{b} P$$



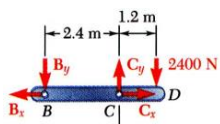
Пример 3:

Да се определят вътрешните големина в точката J од лостот ACF и во точката K од лостот BCD.

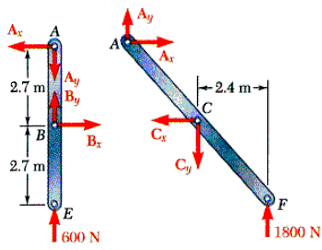




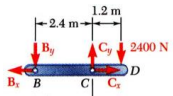
$$\begin{aligned} \sum M_E = 0: \\ -(2400\text{ N})(3.6\text{ m}) + F(4.8\text{ m}) &= 0 \\ F &= 1800\text{ N} \\ \sum F_y = 0: \\ -2400\text{ N} + 1800\text{ N} + E_y &= 0 \\ E_y &= 600\text{ N} \\ \sum F_x = 0: \\ E_x &= 0 \end{aligned}$$



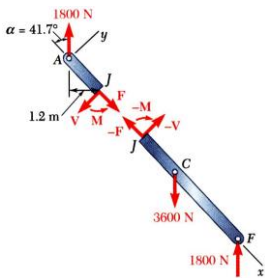
$$\begin{aligned} \sum M_B = 0: \\ -(2400\text{ N})(3.6\text{ m}) + C_y(2.4\text{ m}) &= 0 \\ C_y &= 3600\text{ N} \\ \sum M_C = 0: \\ -(2400\text{ N})(1.2\text{ m}) + B_y(2.4\text{ m}) &= 0 \\ B_y &= 1200\text{ N} \\ \sum F_x = 0: \\ -B_x + C_x &= 0 \end{aligned}$$



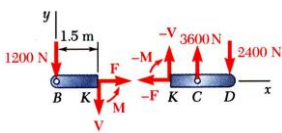
$$\begin{aligned} \sum M_A = 0: \\ B_x(2.4\text{ m}) = 0 \\ B_x = 0 \\ \sum F_x = 0: \\ B_x - A_x = 0 \\ A_x = 0 \\ \sum F_y = 0: \\ -A_y + B_y + 600\text{ N} = 0 \\ A_y = 1800\text{ N} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \\ -B_x + C_x = 0 \\ C_x = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum M_J = 0: \\ -(1800\text{ N})(1.2\text{ m}) + M = 0 \\ M = 2160\text{ N}\cdot\text{m} \\ \sum F_x = 0: \\ F - (1800\text{ N})\cos 41.7^\circ = 0 \\ F = 1344\text{ N} \\ \sum F_y = 0: \\ -V + (1800\text{ N})\sin 41.7^\circ = 0 \\ V = 1197\text{ N} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum M_K = 0: \\ (1200\text{ N})(1.5\text{ m}) + M = 0 \\ M = -1800\text{ N}\cdot\text{m} \\ \sum F_x = 0: \\ F = 0 \\ \sum F_y = 0: \\ -1200\text{ N} - V = 0 \\ V = -1200\text{ N} \end{aligned}$$



МЕХАНИКА 1

8. ЛИНИСКИ НОСАЧИ

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски

8.1. ПОИМ ЗА ЛИНИСКИ НОСАЧ

ЛИНИСКИ НОСАЧ е круто тело во облик на права греда, потпрено на било какви потпори (лежишта).

Во зависност од потпорите линиските носачи може да се поделат на:

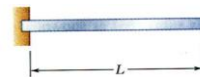
ПРОСТА ГРЕДА – линиски носач потпрен на подвижно и неподвижно лежиште на неговите два краја



ГРЕДА СО ПРЕПУСТ – линиски носач потпрен на подвижно и неподвижно лежиште, а должината на гредата е поголема од растојанието меѓу лежиштата



КОНЗОЛА – линиски носач кај кој едниот крај е вклетен, а другиот слободен

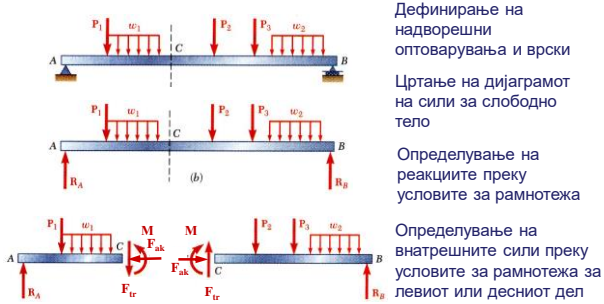


Носачите може да бидат оптоварени со:



Изборот на потпорите (лежишта) при формирањето на линиски носач се врши така да се спречат сите степени на слобода на движење на носачот

8.2. ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА ТРАНСВЕР. СИЛА, НАПАДЕН МОМЕНТ И АКС. СИЛА

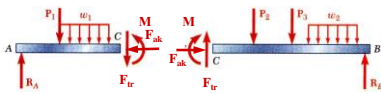


Дефинирање на надворешни оптоварувања и врски

Цртање на дијаграмот на сили за слободно тело

Определување на реакциите преку условите за рамнотежа

Определување на внатрешните сили преку условите за рамнотежа за левиот или десниот дел



Внатрешните големина кои се јавуваат во замислениот пресек (точка С) и што се во рамнотежа со сите надворешни сили и моменти што дејствуваат на левиот или на десниот дел од носачот се нарекуваат **статички големина**, а се претставени со **трансверзална сила (F_{tr})**, **нападен момент (M)** и **аксијална сила (F_{ak})**.

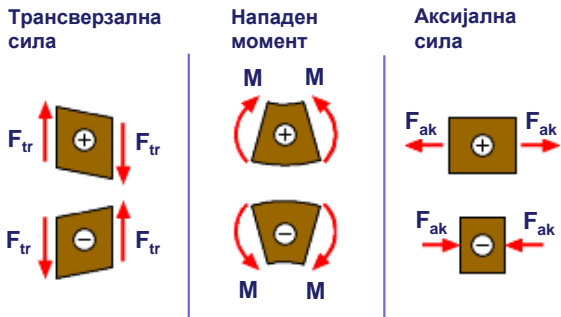
Графичките прикази за промена на статичките големина по должината на носачот се нарекуваат **дијаграми на статичките големина**

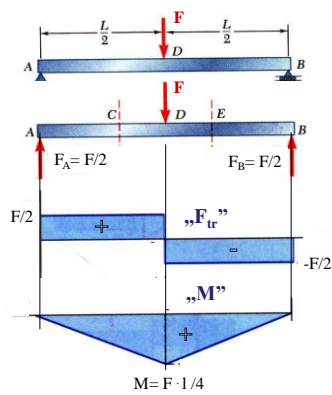
Трансферзалната сила F_{tr} во еден произволен пресек $n-n$ е еднаква на алгебарскиот збир на сите надворешни сили и реакции кои имаат правец нормален на носачот, лево или десно од пресекот.

Момент на свиткување или нападен момент M во еден произволен пресек $n-n$ претставува алгебарски збир на статичките моменти од сите надворешни оптоварувања и реакции, лево или десно од пресекот.

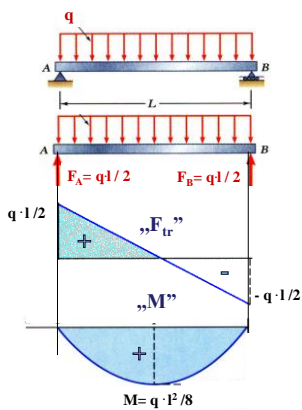
Аксијалната сила F_{ak} во еден произволен пресек $n-n$ е еднаква на алгебарскиот збир на сите надворешни сили и реакции кои имаат правец на оската од носачот, лево или десно од пресекот.

При пресметка на трансверзалната сила, нападниот момент и аксијалната сила се користат следните предзнаци:





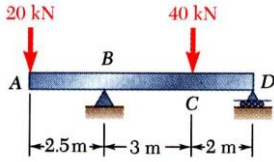
8.2.1. Проста греда симетрично оптоварена со концентрирана сила



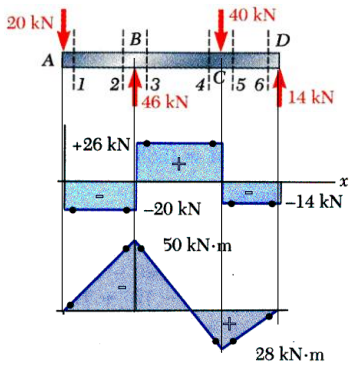
8.2.2. Проста греда симетрично оптоварена со континуиран товар

Пример 1:

Да се определат реакциите и да се нацртаат дијаграмите на статичките големини за носачот прикажан на сликата



Решение 1:





МЕХАНИКА 1

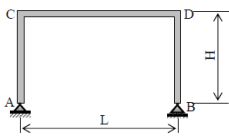
9. РАМКОВИ НОСАЧИ - РАМКИ

наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски

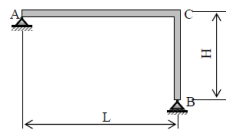
9.1. ПОИМ ЗА РАМКОВ НОСАЧ

Носач кој е составен од две или повеќе крути тела чии оски не лежат на иста права, а меѓусебно се круто поврзани со крута врска.

Рамка



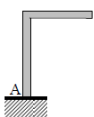
Полурамка



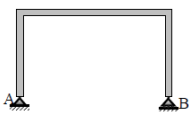
СТАТИЧКИ ОПРЕДЕЛЕНИ РАМКИ

Бројот на непознати реакции во потпорите е еднаков на бројот на расположливите статички услови за рамнотежа.

систем конзола



систем проста греда

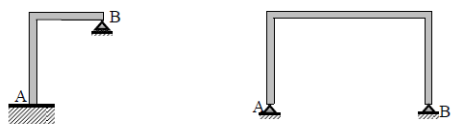


систем греда со препусти



НАДВОРЕШНО СТАТИЧКИ НЕОПРЕДЕЛЕНИ РАМКИ

Бројот на непознати реакции во потпорите е поголем од бројот на расположливите статички услови за рамнотежа.



ВНАТРЕШНО СТАТИЧКИ НЕОПРЕДЕЛЕНИ РАМКИ

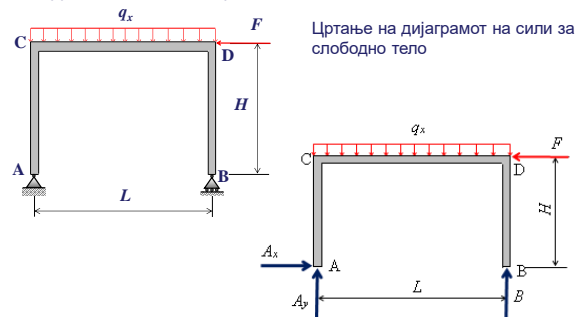
Бројот на реакциите е еднаков на бројот на статичките услови за рамнотежа, но внатрешните статички големина не може да се определат како сума на статичките големина од левата или десната страна.

Секоја затворена рамка е трипати статички неопределена.



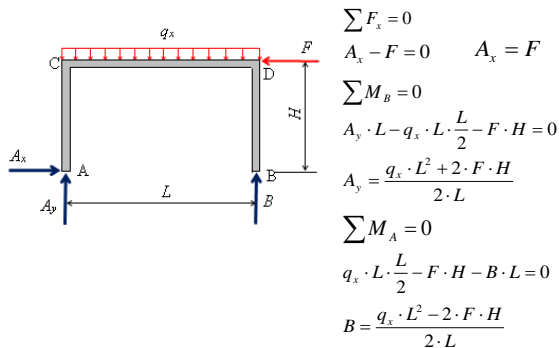
9.2. ПОСТАПКА ЗА АНАЛИЗА НА РАМКА

ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА РЕАКЦИИТЕ ВО ПОТПОРИТЕ

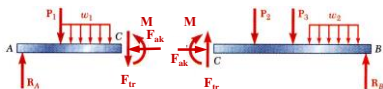


Цртање на дијаграмот на сили за слободно тело

Реакциите се определуваат преку условите за рамнотежа



ОПРЕДЕЛУВАЊЕ НА СТАТИЧКИТЕ ГОЛЕМИНИ



Внатрешните големини кои се јавуваат во замислениот пресек (точка C) и што се во рамнотежа со сите надворешни сили и моменти што дејствуваат на левиот или на десниот дел од носачот се нарекуваат **статички големини**, а се претставени со **трансверзална сила (F_{tr})**, **нападен момент (M)** и **аксијална сила (F_{ак})**.

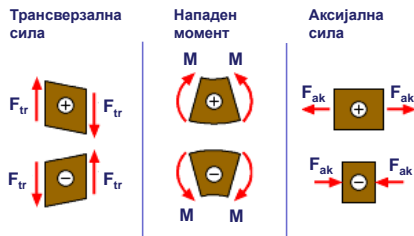
Графикните прикази за промена на статичките големини по контурата на носачот се нарекуваат **дијаграми на статичките големини**.

Трансферзалната сила F_{tr} во еден произволен пресек *n-n* е еднаква на алгебарскиот збир на сите надворешни сили и реакции кои имаат правец нормален на носачот, лево или десно од пресекот.

Момент на свиткување или нападен момент M во еден произволен пресек *n-n* претставува алгебарски збир на статичките моменти од сите надворешни оптоварувања и реакции, лево или десно од пресекот.

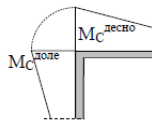
Аксијалната сила F_{ак} во еден произволен пресек *n-n* е еднаква на алгебарскиот збир на сите надворешни сили и реакции кои имаат правец на оската од носачот, лево или десно од пресекот.

При пресметка на трансферзалната сила, нападниот момент и аксијалната сила се користат следните предзнаци:



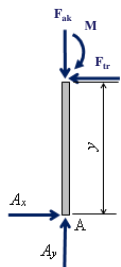
Предзнаците се однесуваат кога се разгледуваат елементите од внатрешна страна на рамката.

На место каде оските од двата дела од рамката лежат на правци под агол нападниот момент се пренесува од едната на другата плоча со својата големина и знак.



На место каде оските од двата дела од рамката лежат на правци под агол од 90°, трансверзалната сила за хоризонталниот дел претставува аксијална сила за вертикалниот дел, и обратно

Определување на внатрешни статички големини



$$F_{tr(A-C)} = -A_x = -F$$

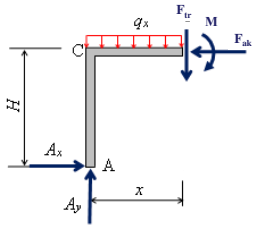
$$M_y = -A_x \cdot y = -F \cdot y$$

$$y = 0 \quad M_A = 0$$

$$y = H \quad M_C^{доле} = -F \cdot H$$

$$F_{ak(A-C)} = -A_y = -\frac{q_x \cdot L^2 + 2 \cdot F \cdot H}{2 \cdot L}$$

Определување на внатрешни статички големини



$$F_{tr(x)} = A_y - q_x \cdot x$$

за $x = 0$

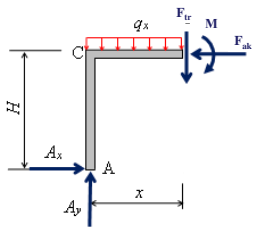
$$F_{tr(C)} = \frac{q_x \cdot L^2 + 2 \cdot F \cdot H}{2 \cdot L}$$

за $x = L$

$$T_{tr(D)} = -\frac{q_x \cdot L^2 - 2 \cdot F \cdot H}{2 \cdot L}$$

за $F_{tr(x)} = 0$ $x_m = \frac{q_x \cdot L^2 + 2 \cdot F \cdot H}{2 \cdot q_x \cdot L}$

Определување на внатрешни статички големини



$$M_{(x)} = A_y \cdot x - q_x \cdot x \cdot \frac{x}{2} - A_x \cdot H$$

за $x = 0$ $M_C^{zope} = -F \cdot H$

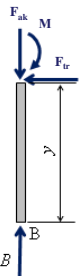
за $x = L$ $M_D^{zope} = 0$

за $x_m = \frac{q_x \cdot L^2 + 2 \cdot F \cdot H}{2 \cdot q_x \cdot L}$

$$M_{max} = \frac{q_x \cdot L^2}{8} - \frac{F \cdot H}{2} + \frac{F^2 \cdot H^2}{2 \cdot q_x \cdot L^2}$$

$$F_{ak(x)} = -A_x = -F$$

Определување на внатрешни статички големини

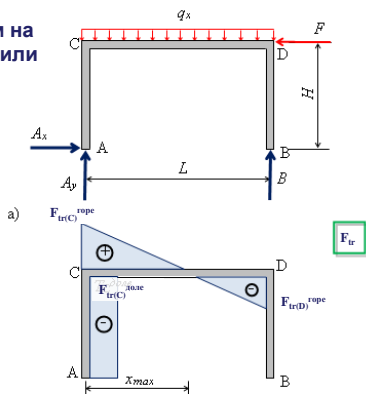


$$F_{tr(B-D)} = 0$$

$$M_{(B-D)} = 0$$

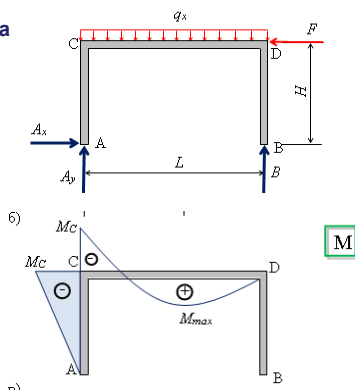
$$N_{ak(B-D)} = -B = -\frac{q_x \cdot L^2 - 2 \cdot F \cdot H}{2 \cdot L}$$

Цртање дијаграм на трансверзални сили



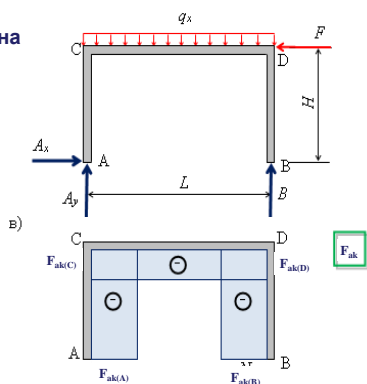
F_{tr}

Цртање дијаграм на нападни моменти



M

Цртање дијаграм на аксијални сили



F_{ak}



МЕХАНИКА 1

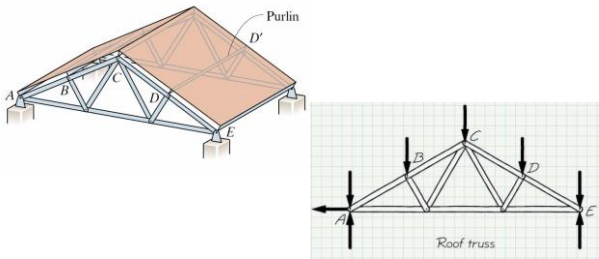
10. РЕШЕТКАСТИ НОСАЧИ - РЕШЕТКИ

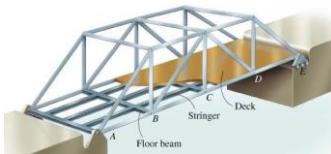
наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски



10.1. ПОИМ ЗА РЕШЕТКАСТ НОСАЧ

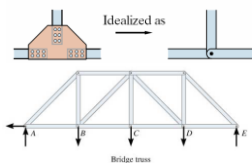
РЕШЕТКАСТ НОСАЧ (РЕШЕТКА) се нарекува конструкција која се состои од прави стапови кои на краевите се меѓусебно зглобно поврзани, а која е потпрена потпори (лежишта).





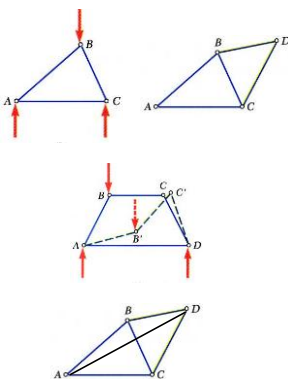
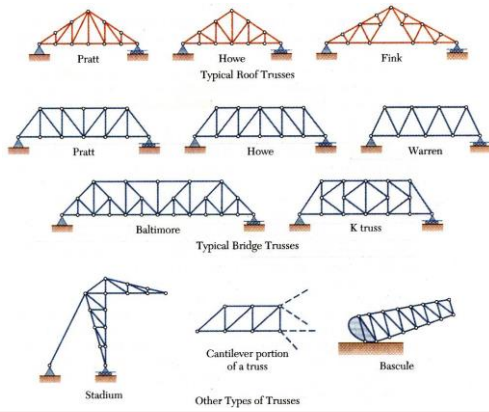
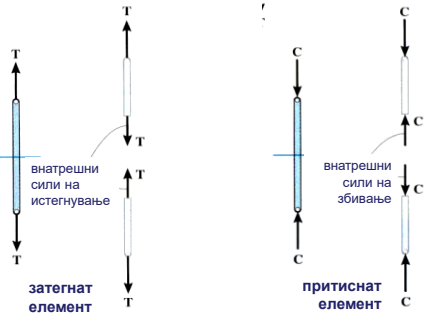
ПРЕТПОСТАВКИ / АПРОКСИМАЦИИ:

- сите стапови од решетката се прави и поврзани со зглобови без триење
- силите дејствуваат во рамнина на решетката и само во јазлите
- сопствената тежина на стаповите е мала во споредба со надворешните сили и затоа се занемарува





Ако се исполнети претпоставките, тогаш секој стап е изложен на затегнување или притисок.

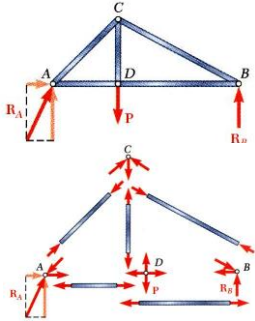


Стабилна решетка без одвишни стапови ($s=2n-3$)
s- број на стапови
n- број на јазли

Нестабилна решетка ($s<2n-3$)

Стабилна решетка со одвишни стапови ($s>2n-3$)

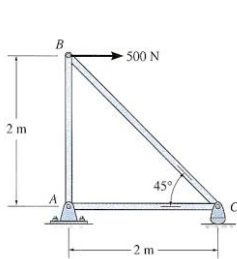
10.2. МЕТОД НА ЈАЗЛИ



- Определување на реакциите
- Замислен прекин на стаповите од јазол во кој се поврзани најмногу 2 стапа
- Примена на условите за рамнотежа за тој јазол ($\sum X=0$; $\sum Y=0$)
- Определување на силите во тие два стапа по големина и насока
- Повторување на претходните постапки за секој јазол поединечно
- Внесување на вредностите за силите во табела

Пример 10.1:

Со методот на јазли да се определат силите во стаповите.



F_{BA} (tension) F_{BC} (compression)

$$\sum X = 0$$

$$500 - F_{BC} \sin 45^\circ = 0$$

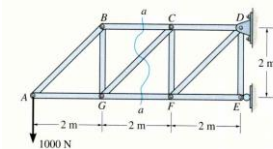
$$F_{BC} = 500\sqrt{2} \text{ N}$$

$$\sum Y = 0$$

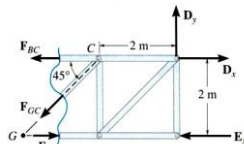
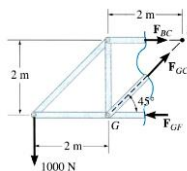
$$F_{BC} \cos 45^\circ - F_{BA} = 0$$

$$F_{BA} = 500 \text{ N}$$

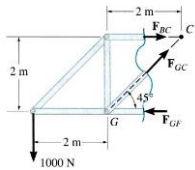
10.3. МЕТОД НА ПРЕСЕЦИ (метод на Ритер)



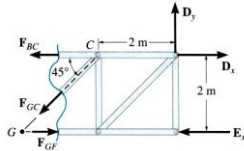
- Определување на реакциите
- Замислен прекин на решетката на 2 дела низ најмногу 3 стапа и замена на внатрешните сили во исечените стапови



- Примена на условите за рамнотежа за било кој дел од решетката ($\sum X=0$; $\sum Y=0$; $\sum M=0$)
- Определување на внатрешните сили во пресечените стапови



$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &\Rightarrow F_{GF} \\ \sum M_G = 0 &\Rightarrow F_{BC} \\ \sum Y = 0 &\Rightarrow F_{GC} \\ \sum X = 0 &\Rightarrow \text{контрола} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sum M_C = 0 &\Rightarrow F_{GF} \\ \sum M_G = 0 &\Rightarrow F_{BC} \\ \sum Y = 0 &\Rightarrow F_{GC} \\ \sum X = 0 &\Rightarrow \text{контрола} \end{aligned}$$

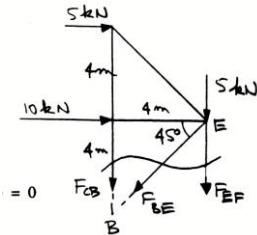
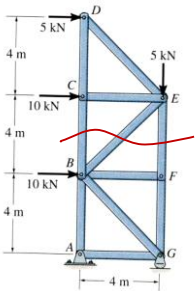


МАШИНСКИ
ФАКУЛТЕТ
СКОПЈЕ

МЕХАНИКА 1
Проф. д-р Виктор Газрилоски

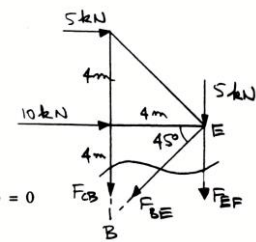
Пример 10.2:

Со методот на пресеци да се определат силите во стаповите EF, BE и BC.



МАШИНСКИ
ФАКУЛТЕТ
СКОПЈЕ

МЕХАНИКА 1
Проф. д-р Виктор Газрилоски



$$\begin{aligned} \sum X = 0 \\ 5 + 10 - F_{BE} \cos 45^\circ &= 0 \\ F_{BE} &= 15\sqrt{2} = 21,2 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_E = 0 \\ -5 \cdot 4 + F_{CB} \cdot 4 &= 0 \\ F_{CB} &= 5,0 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0 \\ -5 \cdot 8 - 10 \cdot 4 - 5 \cdot 4 - F_{EF} \cdot 4 &= 0 \\ F_{EF} &= -25,0 \text{ kN} \end{aligned}$$

промена на насока $F_{EF} = 25,0 \text{ kN}$

	затегане	притисок
F_{BE}	21,2 kN	
F_{CB}	5,0 kN	
F_{EF}		25,0 kN



МАШИНСКИ
ФАКУЛТЕТ
СКОПЈЕ

МЕХАНИКА 1
Проф. д-р Виктор Газрилоски



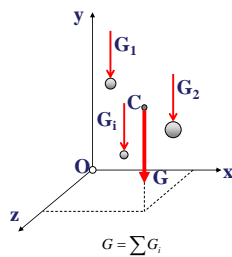
МЕХАНИКА 1

11. ТЕЖИШТЕ

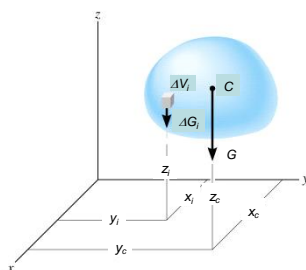
наставник: Проф. д-р Виктор Гаврилоски

11.1. ПОИМ ЗА ТЕЖИШТЕ НА ТЕЛО

Гравитационите сили од елементарните делови од кои е составено телото, може да се заменат со дејство на една резултантна сила со големина колку што е тежината на телото и со нападна точка во **тежиштето на телото**



Тежиште или центар на гравитација на едно круто тело претставува онаа точка од телото каде што може да се постави потпора за тоа да остане во рамнотежа.



$$x_c G = x_1 G_1 + x_2 G_2 + \dots + x_n G_n = \sum x_i \Delta G_i$$

$$x_c = \frac{\sum \Delta G_i \cdot x_i}{G}$$

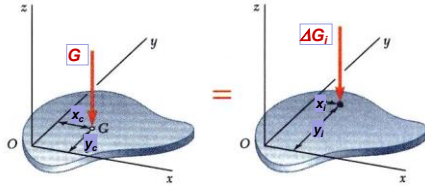
$$y_c G = y_1 G_1 + y_2 G_2 + \dots + y_n G_n = \sum y_i \Delta G_i$$

$$y_c = \frac{\sum \Delta G_i \cdot y_i}{G}$$

$$z_c G = z_1 G_1 + z_2 G_2 + \dots + z_n G_n = \sum z_i \Delta G_i$$

$$z_c = \frac{\sum \Delta G_i \cdot z_i}{G}$$

тежиштето на тенка плоча може да се определи од условот дека дека моментот од гравитационата сила (околу соодветната оска) е збир од моментите кои ги прават елементарните гравитациони сили околу истата оска.

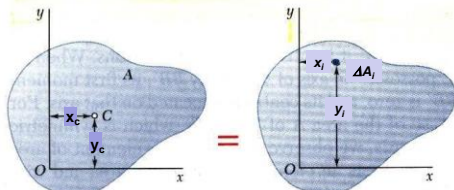


$$\sum M_y \Rightarrow x_c \cdot G = \sum x_i \Delta G_i$$

$$\sum M_x \Rightarrow y_c \cdot G = \sum y_i \Delta G_i$$

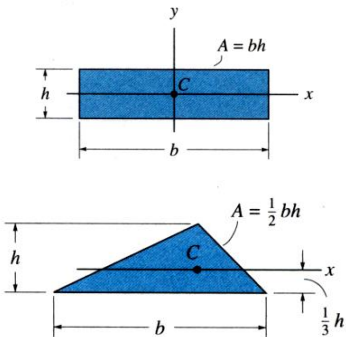
11.2. ТЕЖИШТЕ НА ПОВРШИНА

тежиштето на површина се пресметува по аналогија со тежиштето на тенка плоча при што се употребува концептот на момент на површина околу оската.

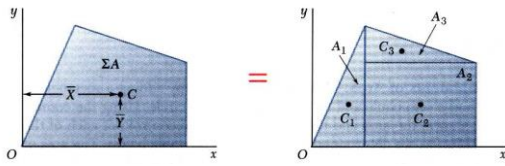


$$x_c = \frac{\sum \Delta A_i \cdot x_i}{A} ; \quad y_c = \frac{\sum \Delta A_i \cdot y_i}{A}$$

тежиште на елементарни фигури

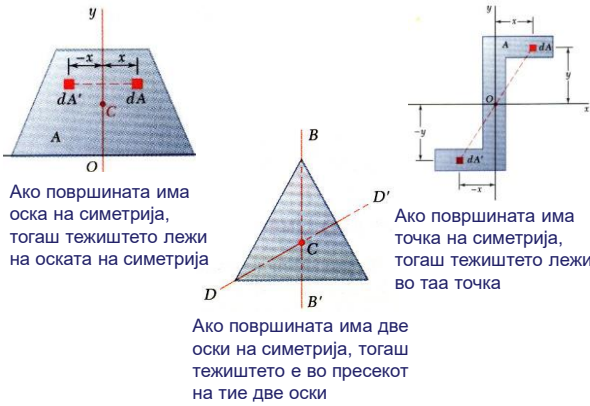


тежиште на површина со сложен облик



$$x_C = \frac{\sum A_i \cdot x_{Ci}}{A} = \frac{A_1 \cdot x_{C1} + A_2 \cdot x_{C2} + A_3 \cdot x_{C3}}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$y_C = \frac{\sum A_i \cdot y_{Ci}}{A} = \frac{A_1 \cdot y_{C1} + A_2 \cdot y_{C2} + A_3 \cdot y_{C3}}{A_1 + A_2 + A_3}$$



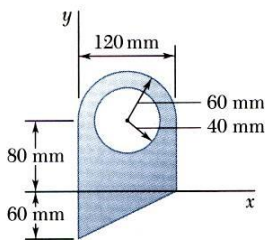
Ако површината има
оска на симетрија,
тогаш тежиштето лежи
на оската на симетрија

Ако површината има
точка на симетрија,
тогаш тежиштето лежи
во таа точка

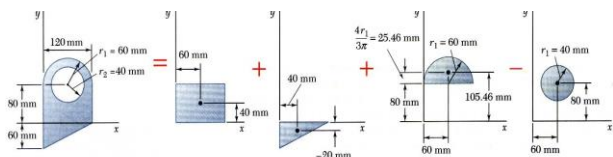
Ако површината има две
оски на симетрија, тогаш
тежиштето е во пресекот
на тие две оски

Пример 11.1:

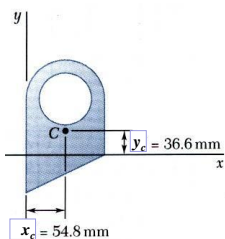
Да се определи тежиштето на сложената фигура дадена
на сликата.



Решение 11.1:



	A, mm^2	x_j, mm	y_j, mm	xA_j, mm^3	yA_j, mm^3
прягоуг.	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
триагол.	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	-20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
полуокруг.	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
круг	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma xA_j = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma yA_j = +506.2 \times 10^3$



$$x_c = \frac{\sum x_j A_j}{\sum A} = \frac{757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3}{13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2}$$

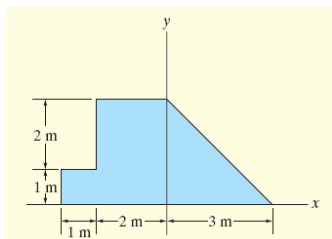
$$x_c = 54.8 \text{ mm}$$

$$y_c = \frac{\sum y_j A_j}{\sum A} = \frac{506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3}{13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2}$$

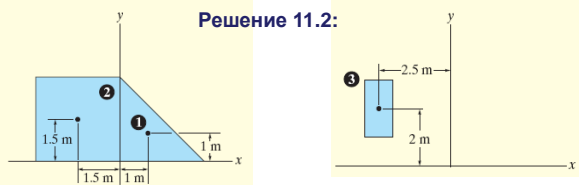
$$y_c = 36.6 \text{ mm}$$

Пример 11.2:

Да се определи тежиштето на сложената фигура дадена на сликата.



Решение 11.2:

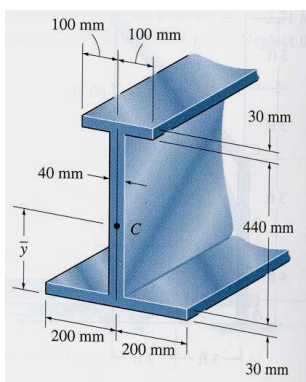


Segment	A (m ²)	\bar{x}_i (m)	\bar{y}_i (m)	$\bar{x}_i A_i$ (m ³)	$\bar{y}_i A_i$ (m ³)
1	$\frac{1}{2}(3)(3) = 4.5$	1	1	4.5	4.5
2	$(3)(3) = 9$	-1.5	1.5	-13.5	13.5
3	$-(2)(1) = -2$	-2.5	2	5	-4
	$\Sigma A = 11.5$			$\Sigma \bar{x}_i A_i = -4$	$\Sigma \bar{y}_i A_i = 14$

$$x_c = \frac{\Sigma \bar{x}_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{-4}{11.5} = -0,348 \text{ mm} \quad y_c = \frac{\Sigma \bar{y}_i A_i}{\Sigma A_i} = \frac{14}{11.5} = 1,22 \text{ mm}$$

Пример 11.3:

Да се определи тежиштето на сложената фигура дадена на сликата.



Решение 11.3:
